Sammlung Göschen

Kinematik

Von

Dr.-Ing. Hans Polster

Mit 76 Abbildungen



Sammlung Göschen

Kinematik

Von

Dr.-Ing. Hans Pols

Betriebsingenieur der Badischen Anilin-
Merseburg-Leuna

Mit 76 Abbildu

Zweite Au



Berlin und L
Vereinigung wissenscha
Walter de Gruyt
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshand
buchhandlung · Georg Reimer · Karl J
1920



Druck
r Spamerschen
ruckerei in Leipzig

Inhaltsverzeichnis.

Literaturverzeichnis.

A. Werke über Kinematik.

1. F. Reuleaux, Theoretische Kinematik, I. Teil, Braunschweig 1875. Desgl., II. Teil, Braunschweig 1900.
2. L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888.
3. H. Weiß, Grundsätze der Kinematik, I. Teil, Leipzig 1900.
4. K. Heun, Lehrbuch derMechanik, I. Teil: Kinematik, Leipzig 1906.
5. Christmann - Baer, Grundzüge der Kinematik, Berlin 1910.
6. H. Polster, Kinematik, Sammlung Göschen, 1912.
7. W. Hartmann, Die Maschinengetriebe, Berlin 1913.
8. M. Grübler, Getriebelehre, Berlin 1917.

B. Werke über Sondergebiete der Kinematik und Dissertationen.

9. H. Lorenz, Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffsmaschinen, Leipzig 1901.
10. Schubert, Theorie des Schlickschen Massenausgleichs bei mehrkurbligen Dampfmaschinen, Leipzig 1901.
11. M. Schwabach, Dynamische Theorie der Verschwindlafetten und kinemat. Schußtheorie, Diss., Berlin 1904.
12. H. Meuth, Kinetik und Kinetostatik des Schubkurbelgetriebes, Diss., 1905.

13. Brandt, Die rotierende Kurbelschleife und die Schleppkurbel als Antrieb für Propellerriemen, Diss., Berlin 1908.

14. K. Doehne, Die Bewegungsverhältnisse von Steuergetrieben mit Schwingdaumen, Diss., Berlin 1908.

15. Essich, Über Steuerungsgetriebe mit Wälzhebeln, Diss., Berlin 1909.

16. F. Döhne, Über Druckwechsel und Stöße bei Maschinen mit Kurbeltrieb, Diss., Berlin 1911.

17. H. Polster, Experimentelle Untersuchung der Druckwechsel u. Stöße im Schubkurbelgetriebe, Diss., Dresden 1913.

18. C. Herre, Bewegungsmechanismen.

19. P. Moser, Druckwechsel bei Maschinen mit Kurbeltrieb, Diss. Zürich 1917.

C. Aufsätze über Sonderprobleme der Kinematik.

a) Allgemeines.

20. Aronhold, Grundzüge d. kinemat. Geometrie, Gew. 1872.

21. C. Schadwill, Das Gliedervierseit als Grundlage der ebenen Kinematik, Gew. 1876.

22. T. Rittershaus, Die kinemat. Kette, ihre Beweglichkeit und Zwangläufigkeit, Civ. 1876.

23. Derselbe, Die Beschleunigung der ebenen Bewegung, Civ. 1878.

24. L. Burmester, Über d. Beschleunigungszustand ähnlichveränderlicher starrer ebener Systeme, Civ. 1878.

25. O. Mohr, Die geom. Konstruktion d. Beschleunigung d. ebenen Bewegung, Civ. 1879.

26. L. Burmester, Über die momentane Bewegung ebener kinemat. Ketten, Civ. 1880.

27. A. Ramisch, Der momentane Beschleunigungspol und seine Konstruktion, Gew. 1880.

28. M. Grübler, Allgem. Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten, Civ. 1883.

29. R. Mehmke, Über die Geschwindigkeit beliebiger Ordnung eines in seiner Ebene bewegten ähnlich veränderlichen ebenen Systems, Civ. 1883.

30. A. Ramisch, Beiträge z. kinemat. Geometrie, Gew. 1884.

31. M. Grübler, Allgemeine Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten, Gew. 1885.

32. O. Mohr, Über Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplan, Civ. 1887.

33. A. Ramisch, Über ebene kinemat. Zylinderketten und deren momentane Bewegung, Gew. 1888.

34. M. Grübler, Wandlungen der Kinematik in der Gegenwart, Civ. 1889

35. W. Hartmann, Geometrie, Mechanik u. Kinematik, Z. 1890.

36. F. Reuleaux, Über das Verhältnis zwischen Geometrie, Mechanik u. Kinematik, Z. 1890.

37. C. Bodenberg, Quadratische Verwandtschaft der Krümmungsmittelpunkte zweier Glieder einer ebenen kinemat. Kette, Z. d. Hannov. Arch.- u. Ing.-Vereins 1890.

38. W. Hartmann, Ein neues Verfahren zur Aufsuchung des Krümmungskreises, Z. 1893.

39. Wittenbauer, Die Beschleunigungspole der kinematischen Ketten, Z. f. Math. 1895.

40. R. Land, Der Geschwindigkeits- u. Beschleunigungsplan für Mechanismen, nebst Anwendung auf die Schubkurbel, Z. 1896.

41. C. Bodenberg, Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine konstr. Ermittelung, Civ. 1896.

42. F. Wittenbauer, desgl., Civ. 1896.

W. Hartmann, Konstruktion d. Normalen u. d. Krümmungskreise der Polbahnen d. Vierzylinderkette, Civ. 1902.

44. Wittenbauer, Graphische Dynamik, Z. f. Math. 1904.

45. H. Rieder, Kinetographische Verwandtschaft, Diss. 1907.

46. W. Hartmann, Die Beschleunigung der rollenden Bewegung und ihre Bedeutung für die Untersuchung der Bewegungsverhältnisse von Maschinengetrieben, Gew. 1908.

47. K. Hübsch, Eine kinetographische Verwandtschaft bei speziellen Schleifschiebergetrieben, Diss., 1909.

48. Wittenbauer, Das Gleichgewicht ebener kinematischer Ketten, 1916.

49. M. Krause, Theorie der ebenen veränderlichen Systeme.

50. Derselbe, Theorie der ebenen unveränderlichen Systeme.

51. Derselbe, Theorie der affin veränderlichen Systeme.

b) Spezielle Kurbelgetriebe.

52. T. Rittershaus, Das Kurbelgetriebe und seine Anwendungen, Civ. 1878.

53. Derselbe, Die Beschleunigungen am Kurbelgetriebe, Civ. 1879.

54. Derselbe, Die Interferenzkurbelkette, Civ. 1880.

55. O. Mohr, Notiz betr. die Konstruktion d. Beschleunigung am Kurbelgetriebe, Civ. 1880.

56. A. Ramisch, Theoret. Untersuchung einiger in der Praxis angewandter kinematischer Zylinderketten, Gew. 1881.

57. Wehage, Über den ruhigen Gang der Dampfmaschinen mit Kurbelwelle, Z. 1884.

58. J. Täubeles, Über die Beschleunigung des Kreuzkopfs eines Kurbelmechanismus, Civ. 1886.

59. Werner, Dampfmaschinen mit schnellem Umlauf, Z. 1886.

60. Kirsch, Graphische Bestimmung der Kolbenbeschleunigung, Z. 1890 und 1891.

61. W. Hartmann, Dynamische Theorie der Dampfmaschine, Z. 1892 und 1893.

62. Stribeck, Die bei Dampfmaschinen auftretenden Stöße an Kurbel- und Kreuzkopfzapfen, Z. 1893.

63. J. Missong, Über die Steigerung der Arbeitsgeschwindigkeit v. Maschinen mit hin- u. hergehenden Massen, Z. 1893.

64. R. Krause, Graphische Bestimmung der Kolbenbeschleunigung beim Kurbelgetriebe, Z. 1894.

65. O. Mohr, Die Trägheitskräfte einer Schubstange, Civ. 1895.

66. E. Autenrieth, Beitrag zur Bestimmung der Trägheitskräfte einer Schubstange, Z. 1895.

67. Pflüger, dasselbe, Z. 1896.

68. J. Wittenberg, Bestimmung des Massendruckes der hin- u. hergehenden Teile d. Dampfmaschine, Z. 1896.

69. O. Mohr, Die geometr. Bestimmung der Resultierenden der auf eine Schubstange wirkenden äußeren Kräfte, Z. 1899.

70. J. Meifort, Stöße und Momente in Dampfmaschinen, Z. 1899.

71. R. Mollier, Der Beschleunigungsdruck der Schubstange, Z. 1903.

72. J. Torka, Die Kegelabschnitte im Kurbelgetriebe, Gew. 1904.

73. Derselbe, Die Flächen 2. Ordnung in d. mathematischen Getrieben, Gew. 1905.

74. H. Meuth, Kinetik und Kinetostatik des Schubkurbelgetriebes, Dingl. 1905.

75. Wittenbauer, Dynam. Kraftplan des Kurbelgetriebes, Z. 1906.

76. M. Enßlin, Die Trägheitskräfte einer Schubstange, Dingl. 1907.

77. C. Herbst, Analyt. Ermittelung der günstigsten Bewegungsverhältnisse eines Schwinghebelantriebes, Dingl. 1908.

78. P. Brandt, Die rotierende Kurbelschleife u. die Schleppkurbel als Antrieb für Propellerrinnen, Dingl. 1908.

79. J. Torka, Die Maschinengetriebe und ihre mathematischen Grundgebilde, Gew. 1908.

80. M. Kroll, Beitrag zur graph. Berechnung des Kurbelgetriebes, Dingl. 1911.

81. H. Polster, Experimentelle Untersuchung der Druckwechsel u. Stöße im Schubkurbelgetriebe, Forsch.-Arb. Hefte 172 und 173 sowie Z. 1914.

c) Steuerungen.

82. S. M. Schoenelies, Kinematisch-geometrische Untersuchungen über Hebedaumen, Diss. 1872.

83. W. Schenker, Ventilerhebungsverlauf und Kraftwirkungen in Ventilsteuerungen, Dingl. 1902.

84. W. Hartmann, Die Bewegungsverhältnisse von Steuergetrieben mit unrunden Scheiben, Z. 1905.

85. E. Dafinger, Graphodyn. Untersuchung einer Heusinger-Joy-Steuerung, Dingl. 1907.

86. K. Doehne, Die Bewegungsverhältnisse von Steuergetrieben mit Schwingdaumen, Gew. 1908.

87. H. Holzer, Wälzhebel, Z. 1908.

88. E. Essich, Über Steuerungsgetriebe mit Wälzhebeln, Gew. 1909.

89. M. Osthoff, Die Lenzsteuerung an Lokomotiven, Dingl. 1909.
90. H. Götz, Theoret. Untersuchung einer Bonjour-Lachaussée-Dampfmaschine auf Massendruck der Steuerung und Resonanz des Regulators, Gew. 1909.
91. O. Mader, Konstruktion der Ventilbeschleunigung bei Füllungsänderung, Dingl. 1911.
92. R. Bestehorn, Die Form der Steuerungsnocken, Z. 1919.

d) Massenausgleich und Ungleichförmigkeitsgrad.

93. Schlick, Vibrationserscheinung bei Dampfern, Z. 1894.
94. Lorenz, Die Massenwirkung am Kurbelgetriebe u. ihre Ausgleichung bei mehrkurbeligen Maschinen, Z. 1897.
95. Fränzel, Das Taylorsche Verfahren zur Ausbalancierung der Schiffsmaschinen, Z. 1898.
96. Berling, Schiffsschwingungen, Ursachen u. Kritik der Mittel zu ihrer Verminderung, Z. 1899.
97. Mollier, Der Ungleichförmigkeitsgrad von Gasmaschinen mit Aussetzer-Regulierung, Z. 1903.
98. Rüdenberg, Die günstigsten Kurbelwinkel f. Mehrkurbelmaschinen, Dingl. 1904.
99. Mollier, Ausgleich von Vierzylindermaschinen, Z. 1905.
100. Bestehorn, Massenausgleich bei Kurbelgetrieben, insbesondere durch Gegengewichte, Z. 1920.

e) Geradführung und Indikatorschreibzeuge.

101. Burmester, Über die Geradführung durch das Kurbelgetriebe, Civ. 1876.
102. Kirsch, Zur Theorie der Geradführungen, Civ. 1876.
103. A. Ramisch, Die allgemeine Konstruktion der Geradführungen, Gew. 1879.
104. Burmester, Die Geradführung und Proportionalität am Indikator, Z. 1888.
105. W. Hartmann, Die Geradführung u. Proportionalität am Indikator, Z. 1896.

f) Zahnräder und zyklische Kurven.

106. R. Heger, Eine kinematische Aufgabe, Civ. 1876.
107. R. Stribeck, Die Abnutzung der Zahnräder und ihre Folgen, Z. 1894.
108. M. Kohn, Zahnreibung, Z. 1895.
109. J. Goebel, Die Reibung der Zahnräder, Z. 1896.
110. E. Herrmann, Die Eingriffsdauer der Zahnräder bei äußerer Verzahnung, Dingl. 1898.
111. O. Herre, Das exzentrische Kreisradgetriebe, Dingl. 1900.
112. W. Müller, Das Grissongetriebe, Dingl. 1900.
113. G. Lindner, Neuere Zahnformen, Z. 1900.

114. K. Büchner, Abnutzungs- und Reibungsverhältnisse der Stirnzahnräder, Z. 1902.

115. Ebner, Elementares über die zyklischen Kurven, Dingl. 1902.

116. Grisson, Über Grissongetriebe, Z. 1903.

117. W. Hartmann, Genauigkeitsgrad und Geschwindigkeitsverhältnis bei Verzahnungen, Z. 1905.

118. P. Hoppe, Satzräder mit Evolventenverzahnung, Gew. 1909.

119. Bach, Maschinenelemente.

120. Kutzbach, Entwicklung der Zahnrädergetriebe, Z. 1916.

121. Hütte, Taschenbuch.

g) Verschiedenes.

122. T. Rittershaus, Über Ellipsographen, Gew. 1874.

123. Derselbe, Parallelräder u. verwandte Mechanismen, Gew. 1875.

124. Brauer, Kinemat. Untersuchung der Passigdrehbank, Gew. 1876.

125. A. Slaby, Beitrag zur Kenntnis des Ellipsographen, Gew. 1876.

126. F. Reuleaux, Über die Sperrwerke u. ihre Anwendungen, Gew. 1877.

127. H. Wehage, Mechanismus zum Auflösen linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten, Gew. 1878.

128. R. Wirth, Über elliptische Bewegung, Gew. 1890.

129. Koob, Das Regulierproblem in vorwiegend graphischer Behandlung, Z. 1904.

130. Burmester, Kinematische Aufklärung der Bewegung des Auges, 1918.

Hierbei bedeuten:

Z. = Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.
Gew. = Verhandlungen des Vereins zur Förderung des Gewerbefleißes in Preußen.
Dingl. = Dinglers polytechnisches Journal.
Z. f. Math. = Zeitschrift für Mathematik und Physik.
Civ. = Der Civilingenieur.
Forsch.-Arb. = Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieur-Wesens (Verein deutscher Ingenieure).

in weite Kreise getragen und nun erst die Allgemeinheit auf die Wichtigkeit der neuen Wissenschaft für die Kenntnis der Maschinen aufmerksam gemacht.

Der beste Beweis für die Förderung der Kinematik durch Poncelets Vorlesungen ist wohl darin zu erkennen, daß in kurzer Zeit eine ganze Reihe von Werken erschien, die sich mit den Bewegungsvorgängen der Maschinenmechanismen befaßten.

Hierher gehören besonders die Namen von Willis, Giulio, Laboulaye, Rankine, Goodeve, Haton de la Goupillière, Bour, Resal, Morin, Girault, Belanger, Dwelshauers-Déry und Collignon.

Besonders tätig in der weiteren Entwicklung einzelner Theorien waren nach Ampère die Franzosen Poinsot, Chasles, Hachette, Savary, Bobillier u. a.

In Deutschland wurde zunächst außer einigen theoretischen Abhandlungen nichts geschaffen. Erst 1870 erschien ein größeres Werk von Schell, 1872 ein anderes von Aronhold und 1875 Reuleaux' berühmtes Werk: „Theoretische Kinematik“. Eine umfangreiche Bearbeitung fanden die bisher erschienenen Abhandlungen in Burmesters „Lehrbuch der Kinematik“, das im Jahre 1888 herauskam.

Außer den schon Genannten haben noch eine Reihe anderer Männer durch eine große Anzahl von Abhandlungen über Sonderprobleme der Kinematik wesentlichen Anteil an deren stetiger Entwicklung gehabt. Es seien unter anderen hier die Namen genannt Cauchy, Steiner, Schellbach, Möbius, Breton, Transon, Stegmann, Bresse, Jonquières, Lamarle, Mannheim, Grashof, Gilbert, Nicolaidés, Küpper, Somoff, Proell, Sylvester, Saint-Loup, Lignine, Ball, Kempe, Rittershaus, Schadwill, Mohr,

Geisenheimer, Habich, Helm, Schumann, Grübler, Mehmke, Kraft, Rodenberg, Wittenbauer, Land, Koenigs, Mollier, Büchner, Hartmann, Weiß, Holzer, Doehne, Essich.

Theoretischer Teil.

I. Ebene Bewegung eines Punktes.

§ 3. Geradlinige Bewegung.

Weg:

Auf der geraden Linie fg (Fig. 1) bewege sich ein Punkt A. Wir wählen einen Bezugspunkt O auf der Geraden und wollen, um die Lage des Punktes A rechts oder links von O unterscheiden zu können, den Abständen $OA = s$ rechts von O ein positives, links von O ein negatives Vorzeichen geben. Die Bewegung in der Richtung f nach g soll entsprechend als Bewegung im positiven, die von g nach f als solche im negativen Sinne bezeichnet werden.

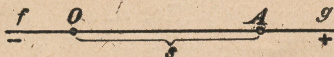


Fig. 1.

Die Bewegung ist eindeutig bestimmt, sobald man zu jeder Zeit t die Entfernung $OA = s$ durch eine Funktion

$$s = f(t)$$

angeben kann.

Markiert man auf der Bahnkurve die Stellen, wo sich der Punkt zur Zeit $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sec befindet, so erhält man ein Bild vom zeitlichen Verlauf der Bewegung.

Viel anschaulicher wird der Vorgang dargestellt, wenn man in einem besonderen rechtwinkligen Koordinatensystem über der Zeit t als Abszisse den Weg s als Ordinate aufträgt. Diese Darstellung heißt die Zeit-Weg-Kurve (Fig. 2).

Geschwindigkeit:

Als Geschwindigkeit v des Punktes A zur Zeit t bezeichnet man das Verhältnis des in der unendlich kleinen Zeit dt zurückgelegten Weges ds zu diesem Zeitelement dt, also

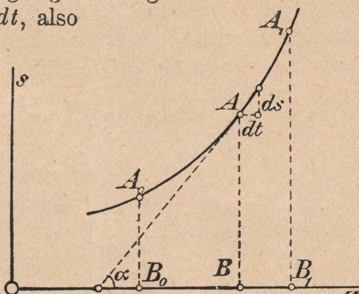


Fig. 2.

(1) $$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t)\,.$$

Aus Fig. 2 erkennt man, daß

$$v = \tan\alpha\,.$$

Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem über der Zeit t die Geschwindigkeit v auf, so erhält man das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm (Fig. 3).

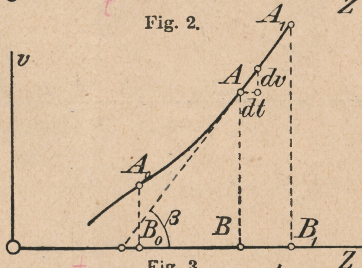


Fig. 3.

Aus der Definition der Geschwindigkeit Gl. (1) ergibt sich

$$ds = v \cdot dt\,,$$

so daß wir den zwischen den Zeiten $t = t_0$ und $t = t_1$ zurückgelegten Weg

$$s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} v\,dt$$

aus dem tv-Diagramm als Fläche $A_0 A_1 B_1 B_0$ entnehmen können.

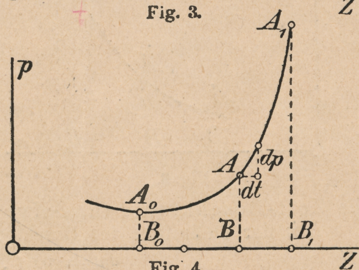


Fig. 4.

Das Weg-Geschwindigkeits-Diagramm (Fig. 5)

erhält man, wenn man die Geschwindigkeit v als Funktion des Weges s aufzeichnet.

Beschleunigung:

Unter der Beschleunigung p des Punktes A zur Zeit t versteht man den Quotienten aus dem in der unendlich kleinen Zeit dt stattfindenden Geschwindigkeitszuwachs dv (nach Größe, Richtung und Richtungssinn) und dem Zeitelement dt, also

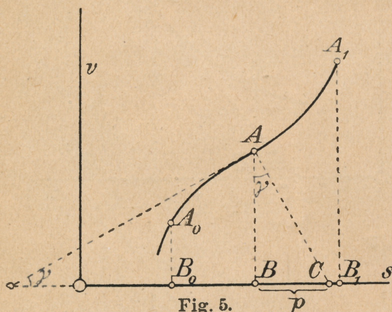


Fig. 5.

$$(2)\quad p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = f''(t)\,.$$

Aus Fig. 3 ergibt sich, daß

$$p = \tan\beta\,.$$

Schreibt man

$$(3)\quad p = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\cdot\frac{dv}{ds}\,,$$

so erkennt man aus Fig. 5, daß die Beschleunigung p im v/s — Diagramm als die Subnormale BC gefunden werden kann, da

$$BC = v\cdot\tan\gamma = v\cdot\frac{dv}{ds} = p \text{ ist.}$$

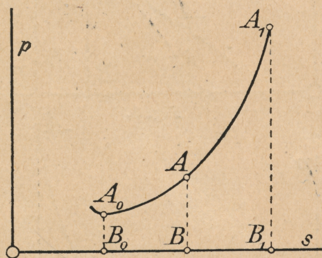


Fig. 6.

Zeichnet man die Werte p als Funktion der Zeit t in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf, so erhält man die Zeit-Beschleunigungs-Kurve (Fig. 4).

Aus der Definition der Beschleunigung Gl. (2) folgt

$$dv = p\,dt\,.$$

und daher läßt sich aus dem p/t — Diagramm die Geschwindigkeit v_1 zur Zeit t_1 durch Planimetrieren der Fläche $A_0 A_1 B_1 B_0$ finden, wenn man ihren Wert v_0 zur Zeit t_0 kennt; denn es ist

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} p\, dt\,.$$

Zum Weg-Beschleunigungs-Diagramm gelangt man durch Aufzeichnung der Beschleunigung p über dem Weg s (Fig. 6).

Aus Gl. (3) folgt

$$v\, dv = p\, ds\,,$$

$$v_1^2 - v_0^2 = 2\int_{s_0}^{s_1} p\, ds\,,$$

so daß man, wenn freilich umständlicher, auch aus dem ps-Diagramm zur Zeit t_1 die Geschwindigkeit v_1 bestimmen könnte, sobald ihr Wert v_0 zur Zeit t_0 bekannt ist.

§ 4. Zusammensetzung zweier geradliniger Bewegungen.

Zusammensetzung der Wege:

Bewegt sich ein Punkt A (Fig. 7) in der Zeit t gegen eine Ebene E_1 geradlinig, wobei er den Weg $A_0 A_1 = s_r$ gegen den ursprünglich in der Ebene E_1 innegehabten Punkt A_0 zurücklegt, und wird die Ebene E_1 in der gleichen Zeit t gegen eine feste Bezugsebene E_0 um den Weg s_1 in gerader Richtung verschoben, so fällt der Punkt A_1 nach diesen t sec mit dem Punkte A_2 der Ebene E_0 zusammen, den man als Endpunkt der Diagonale $A_0 A_2 = s$ im Parallelogramm $A_0 A_1 A_2 A_1'$ erhält. Zu diesem Punkte gelangt man also durch Aneinandersetzen der Wege s_r und s_1 unter Berücksichtigung der richtigen Wegrichtungen (auch dem Bewegungssinne nach).

Dieses Verfahren heißt „geometrische Addition" und kann symbolisch geschrieben werden

$$s = s_r \mathbin{\hat{+}} s_1\,,$$

wobei das Zeichen ^ über dem + diese Summe von einer gewöhnlichen algebraischen Summe unterscheidet.

Wie man aus Fig. 7 sieht, ist es dabei gleichgültig, ob man den Linienzug $A_0 A_1 A_2$ oder $A_0 A_1' A_2$ verfolgt,

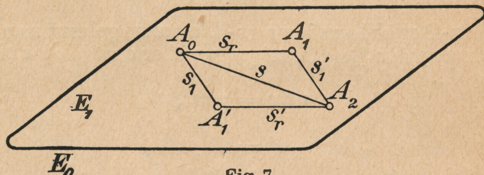


Fig. 7.

d. h. **die Reihenfolge der Summanden ist beliebig**, und wir können auch schreiben

$$s = s_1 \hat{+} s_r .$$

Man kann das Verhältnis

$$v_m = \frac{s}{t}$$

die **mittlere Geschwindigkeit** der zusammengesetzten Bewegung nennen, nicht zu verwechseln mit der tatsächlichen Geschwindigkeit. Mit dieser würde sie nur dann übereinstimmen, wenn beide Bewegungen, sowohl die Relativbewegung des Punktes gegen die bewegte Ebene E_1, als auch deren Bewegung gegen E_0 während der in Frage kommenden Zeit t gleichförmige Bewegungen sind.

Zusammensetzung der Geschwindigkeiten:

Das Parallelogramm der Wege für geradlinige Bewegungen gilt auch, wenn das Zeitelement dt, in dem wir die Bewegungen betrachten, unendlich klein wird. Da wir in dieser kurzen Zeit sogar die einzelnen Bewegungen als gleichförmig ansehen können, so wird die mittlere Geschwindigkeit im betrachteten Zeitelement zur tatsächlichen Geschwindigkeit der zusammengesetzten

Bewegung, d. h. die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Bewegung ist

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds_r \hat{+} ds_1}{dt} = v_r \hat{+} v_1 ,$$

wenn $v_r = \frac{ds_r}{dt}$ und $v_1 = \frac{ds_1}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punktes A relativ zur bewegten Ebene E_1 und die der letzteren gegen die ruhende Ebene sind.

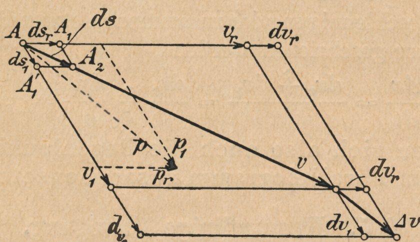


Fig. 8.

Wir können also die tatsächliche Geschwindigkeit einer zusammengesetzten Bewegung durch geometrische Addition der Geschwindigkeiten der Einzelbewegungen finden.

Zusammensetzung der Beschleunigungen:

Beobachten wir die zusammengesetzte Bewegung in zwei um dt zeitlich verschiedenen Punkten, und sind zunächst v_r und v_1 die Geschwindigkeiten der Einzelbewegungen, während sie im 2. Punkte $v_r + dv_r$ und $v_1 + dv_1$ sind, so erhalten wir die Geschwindigkeit v der zusammengesetzten Bewegung

im 1. Zeitpunkte

$$v = v_r \hat{+} v_1 ,$$

im 2. Zeitpunkte

$$v \mathbin{\hat{+}} \Delta v = (v_r + dv_r) \mathbin{\hat{+}} (v_1 + dv_1)\,,$$
$$v \mathbin{\hat{+}} \Delta v = (v_r \mathbin{\hat{+}} v_1) \mathbin{\hat{+}} (dv_r \mathbin{\hat{+}} dv_1)\,,$$
$$\Delta v = dv_r \mathbin{\hat{+}} dv_1\,,$$

d. h. der geometrische Zuwachs der Geschwindigkeit oder die sogenannte „Elementarbeschleunigung" der zusammengesetzten Bewegung Δv ist die geometrische Summe der Elementarbeschleunigungen dv_r und dv_1 der Einzelbewegungen.

Die Beschleunigung der zusammengesetzten Bewegung kann daher geschrieben werden

$$p = \frac{\Delta v}{dt} = \frac{dv_r \mathbin{\hat{+}} dv_1}{dt} = \frac{dv_r}{dt} \mathbin{\hat{+}} \frac{dv_1}{dt} = p_r \mathbin{\hat{+}} p_1\,.$$

Es lassen sich also auch die Beschleunigungen nach dem Parallelogramm zusammensetzen.

§ 5. Krummlinige Bewegung.

Das bei der geradlinigen Bewegung für den Weg und die Geschwindigkeit Gesagte gilt sinngemäß auch für die krummlinige Bewegung.

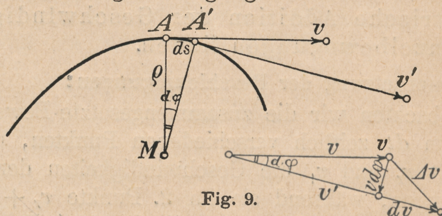


Fig. 9.

Für die Beschleunigungen treten jedoch allgemeinere Verhältnisse ein. Um die hierfür geltenden Beziehungen abzuleiten, denken wir uns zu einer Lage A des bewegten Punktes (Fig. 9) die Nachbarlage A' ermittelt, in

die er von A aus nach Verlauf des Zeitelements dt gelangt ist. Die Geschwindigkeit in A sei v, die in A' sei v'. Da die Geschwindigkeiten in die Richtung der Bahntangenten der Punkte A und A' fallen, so müssen v und v' denselben Winkel $d\varphi$ einschließen, wie diese Tangenten.

Um nach Größe und Richtung zur Geschwindigkeit v' zu gelangen, müssen wir nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten mit v eine kleine Geschwindigkeit Δv, die oben mit „Elementarbeschleunigung" bezeichnet wurde, zusammensetzen. Diese Elementarbeschleunigung wird durch eine Beschleunigung p verursacht, welche in gleicher Richtung und in gleichem Sinne wie Δv auf den Punkt A einwirkt und die Größe hat

$$p = \frac{\Delta v}{dt}.$$

An Stelle von Δv können wir zwei Komponenten einführen

dv in Richtung der Geschwindigkeit v', also in der Tangentenrichtung, und

$v\,d\varphi$ in dazu senkrechter Richtung, also in der Normalenrichtung,

was wir symbolisch schreiben können

$$\Delta v = dv \hat{+} v\,d\varphi .$$

Dann wird die Gesamtbeschleunigung

$$p = \frac{\Delta v}{dt} = \frac{dv \hat{+} v\,d\varphi}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{+} v \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

d. h. die Gesamtbeschleunigung läßt sich geometrisch aus zwei Einzelbeschleunigungen zusammensetzen, von denen die Komponente

$$p_t = \frac{dv}{dt} \tag{4}$$

in die Richtung von v', also in die Tangentenrichtung fällt und daher **Tangentialbeschleunigung** genannt wird. Diese Komponente wirkt lediglich auf die Größenveränderung der Geschwindigkeit v ein.

Die andere Komponente

$$p_n = v \frac{d\varphi}{dt} \tag{5}$$

fällt in die Richtung von $v\,d\varphi$, also steht sie senkrecht zur Tangente und heißt daher **Normalbeschleunigung.** Sie verursacht lediglich die Richtungsänderung der Geschwindigkeit.

Zieht man die beiden Normalen der Kurve in A und A', so schneiden sie sich im Krümmungsmittelpunkt M und bilden den Winkel $d\varphi$ miteinander. $AM = A'M = \varrho$ ist der Krümmungsradius der Bahn im Punkte A. Wir können dann setzen

$$ds = \varrho \cdot d\varphi\,,$$

$$d\varphi = \frac{ds}{\varrho}$$

und mithin läßt sich der oben für die Normalbeschleunigung erhaltene Ausdruck [Gl. (5)] in der Form schreiben

$$p_n = \frac{v\,d\varphi}{dt} = v \cdot \frac{ds}{\varrho \cdot dt} = \frac{v^2}{\varrho}\,.$$

II. Ebene Bewegung zweier Ebenen.

§ 6. Schiebung.

Eine Ebene vollzieht gegen eine andere eine Schiebung, wenn eine in ihr liegende Gerade während der Bewegung ständig einer festen Geraden parallel bleibt.

Dann beschreiben sämtliche Körperpunkte kongruente, gleichliegende Bahnkurven und folgen dem gleichen Bewegungsgesetz. Kennt man daher die Bahn eines einzelnen Punktes der bewegten Ebene und seine Bewegungsgleichung auf ihr

$$s = f(t),$$

so ist damit auch die Bewegung eines jeden anderen Punktes bekannt.

§ 7. Drehung um einen festen Punkt.

Eine Ebene vollzieht gegen eine andere Ebene eine Drehung, wenn einer ihrer Punkte seine Lage ständig beibehält. Der feste Punkt heißt der Drehpunkt, Drehpol oder das Drehzentrum.

Drehwinkel:

In Fig. 10 sei M der Drehpunkt der Bewegung. Wir wählen die durch M gehende feste Bezugsgerade MN und wollen, um den Drehsinn der Bewegung angeben zu können, die Drehung im Sinne des Uhrzeigers als Drehung im positiven, die im umgekehrten Sinne als solche im negativen Sinne bezeichnen.

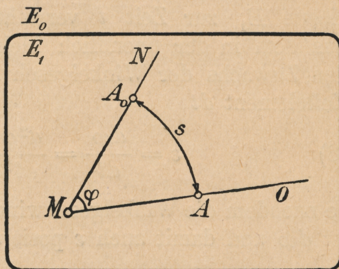


Fig. 10.

Die Drehung der bewegten Ebene E_1 ist eindeutig bestimmt, wenn man zu jeder Zeit t den Winkel φ, den eine mit derselben fest verbundene Gerade MO mit MN einschließt, durch eine Funktion

$$\varphi = f(t)$$

angeben kann. Es kann also φ positives oder negatives Vorzeichen haben, je nach dem Drehsinn.

Winkelgeschwindigkeit:

Als Winkelgeschwindigkeit ω der Ebene E_1 zur Zeit t bezeichnet man das Verhältnis des in der unendlich kleinen Zeit dt beschriebenen Winkels $d\varphi$ zu diesem Zeitelement dt, also

$$(7) \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(f(t)) = f'(t).$$

Da $d\varphi$ je nach dem Drehsinn positiv oder negativ sein kann, so wird ω entsprechend positiv, wenn die Drehung im Sinne des Uhrzeigers, negativ, wenn sie im entgegengesetzten Sinne stattfindet.

Winkelbeschleunigung:

Unter der Winkelbeschleunigung ε der Ebene E_1 zur Zeit t versteht man den Quotienten aus dem in der unendlich kleinen Zeit dt stattfindenden Zuwachs der Winkelgeschwindigkeit $d\omega$ und dem Zeitelement dt

$$(8) \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = f''(t).$$

Je nachdem die Winkelgeschwindigkeit zu- oder abnimmt, ist $d\omega$ und damit auch ε positiv oder negativ.

Bewegung eines beliebigen Punktes der rotierenden Ebene:

Alle Punkte der rotierenden Ebene beschreiben konzentrische Kreise um den Drehpunkt. Ist A_0 die Lage eines Punktes A der rotierenden Ebene zur Zeit $t = 0$, wobei $MA_0 = r$ sein Drehradius ist, A seine Lage zur Zeit t und bezeichnet $\sphericalangle A_0MA = \varphi$ den bei der Drehung

in t sec beschriebenen Drehwinkel, so ist der von A in dieser Zeit zurückgelegte Weg

$$s = r \cdot \varphi .$$

Nach den für die krummlinige Bewegung eines Punktes in § 5 abgeleiteten Beziehungen erhält man aus dieser Bewegungsgleichung die Geschwindigkeit des Punktes A zur Zeit t

(9) $$v = \frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega ,$$

die Tangentialbeschleunigung des Punktes A zur Zeit t

(10) $$p_t = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \varepsilon ,$$

die Normalbeschleunigung des Punktes A zur Zeit t

(11) $$p_n = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{(r\,\omega)^2}{r} = r\,\omega^2 ,$$

die Gesamtbeschleunigung

(12) $$p = p_t \hat{+} p_n = \sqrt{p_t^2 + p_n^2} = \sqrt{(r\,\varepsilon)^2 + (r\,\omega^2)^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} ,$$

den Winkel α derselben gegen den Drehradius MA aus der Beziehung

$$\tan\alpha = \frac{p_t}{p_n} = \frac{r\,\varepsilon}{r\,\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

und wir erhalten somit den Satz:

Bei der Drehung einer Ebene um einen festen Punkt beschreiben alle ihre Punkte konzentrische Kreise. Ihre Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen (auch Tangential- und Normalbeschleunigungen) sind den Drehradien proportional. Ihre Beschleunigungen schließen mit ihren Drehradien gleiche Winkel ein.

§ 8. Momentanpol zweier beliebig sich bewegender Ebenen.

Die ebene Bewegung einer Ebene E_1 (Fig. 11) gegen eine feste Bezugsebene E_0 ist vollständig bestimmt, wenn man die Bewegung zweier ihrer Punkte A und B kennt. Nehmen wir an, diese Punkte hätten sich im Zeitelement dt aus ihren Lagen $A_0 B_0$ in die Lagen $A_1 B_1$ längs ihrer Bahnkurven a und b bewegt. Ersetzen wir die Kurvenelemente $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ durch ihre kleinen Sehnen $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$, errichten auf diesen die Mittelsenkrechten, die sich in P schneiden mögen, und verbinden P mit A_0 und B_0 sowie mit A_1 und B_1, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke $A_0 P B_0$ und $A_1 P B_1$, daß man die Strecke $A_0 B_0$ durch Drehung um P in die Lage $A_1 B_1$ überführen kann.

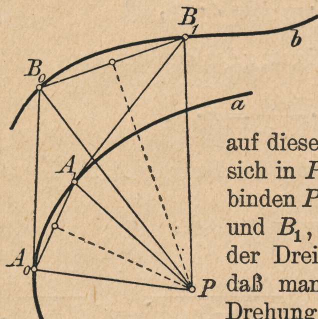


Fig. 11.

Ist das Zeitelement dt unendlich klein, so gehen die Sehnen $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ in die Tangenten der Kurven a und b, und ihre Mittelsenkrechten in die Normalen über. Die Bewegung läßt sich also im betrachteten Zeitpunkte als eine Elementardrehung um den Schnittpunkt P der Bahnnormalen auffassen.

Wir nennen dann P das Momentanzentrum, den Geschwindigkeitspol, Momentanpol oder Pol der Bewegung. Der Momentanpol ist somit der einzige Punkt derbewegten Ebene, der im betrachteten Zeitpunkt in Ruhe bleibt. Alle anderen Punkte sind in Bewegung. Da es gleichgültig ist, welche beiden die Bewegung

bestimmenden Punkte der bewegten Ebene herausgegriffen werden, so müssen die augenblicklichen Normalen der Bahnen aller Punkte sich im Momentanpol schneiden.

Alle diese Strahlen, welche die Punkte der Ebene mit dem Pol verbinden, heißen Hauptstrahlen.

§ 9. Geschwindigkeiten zweier beliebig sich bewegender Ebenen.

Wie man des weiteren bald einsehen wird, kann man die zeichnerische Ermittelung der Geschwindigkeiten sehr vereinfachen, wenn man die letzteren um 90° im Uhrzeigersinne dreht, so daß sie in die Haupt strahlen der Punkte fallen. Wir sprechen dann von den gedrehten, orthogonalen oder „normalen" Geschwindigkeiten der Punkte.

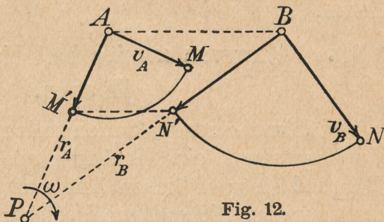


Fig. 12.

Kennt man den Momentanpol P (Fig. 12) sowie die Geschwindigkeit v_A irgendeines Punktes A der Ebene E_1, so ist die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit um den Momentanpol

$$\omega = \frac{v_A}{r_A}$$

und die Geschwindigkeit v_B eines beliebigen anderen Punktes B der Ebene

$$v_B = \omega \cdot r_B = \frac{r_B}{r_A} \cdot v_A,$$

d. h. wir erhalten zeichnerisch v_B als die vierte geometrische

Proportionale aus den drei bekannten Größen r_A, r_B und v_A.

Sind z. B. $AM = v_A$ und $BN = v_B$ die Geschwindigkeiten von A und B in richtiger Größe und Lage, so sind $AM' = v_A$ und $BN' = v_B$ die gedrehten Geschwindigkeiten der Punkte A und B und es muß auf Grund der obigen Beziehung

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{r_B}{r_A},$$

also auch $M'N' \parallel AB$ sein, d. h. wir finden v_B, falls v_A bekannt ist, wenn wir A mit B verbinden und $M'N' \parallel AB$ ziehen.

§ 10. Polkurven zweier beliebig sich bewegender Ebenen.

Während eines unendlich kleinen Zeitelements dt ist jede Bewegung eine Drehung um einen Momentanpol. Während einer endlichen Zeit muß also jede Bewegung aus einer unendlichen Anzahl solcher Elementardrehungen bestehen. Wenn wir es nicht mit dem Spezialfall der Drehung um einen festen Punkt zu tun haben, so muß der Pol in beiden Ebenen seine Lage stetig ändern und gegenüber jeder der beiden Ebenen eine Kurve beschreiben. Diese Kurven heißen die Polbahnen oder Polkurven, und zwar wird die in der festen Ebene liegende Polbahn die ruhende Polkurve (Rastpolbahn), die in der bewegten Ebene liegende die bewegliche Polkurve (Gangpolbahn) genannt.

In jedem Zeitpunkt haben beide Polkurven den Pol gemeinsam. Durch eine Elementardrehung (Drehung um einen unendlich kleinen Winkel) um diesen gemeinsamen Punkt müssen die Nachbarpunkte der Polkurven zur

Deckung gekommen sein. Das ist nur möglich, wenn sich die Polkurven im Pol berühren und während der Bewegung aufeinander abrollen, ohne zu gleiten. Sie heißen aus diesem Grunde auch Rouletten oder Rollkurven.

Sind die Polbahnen sowie das Gesetz bekannt, nach dem sie aufeinander abrollen, so ist hierdurch die Bewegung der Ebenen völlig bestimmt.

§ 11. Hüllkurven.

Es sei die Bewegung einer Ebene gegen eine andere bekannt. Mit der bewegten Ebene seien zwei Kurven α und β verbunden und ihre Hüllkurven a und b in der ruhenden Ebene bestimmt (Fig. 13). A und B seien die momentanen Berührungspunkte der beiden Kurvenpaare.

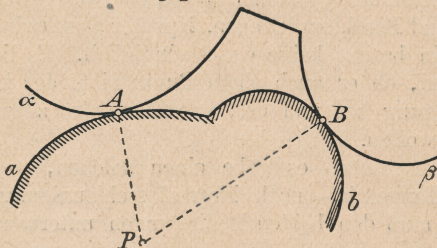


Fig. 13.

Wenn α bzw. β bei der Bewegung weder in a bzw. b eindringen, noch sich davon abheben sollen — und dies ist die Voraussetzung der Hüllkurven —, so müssen sich die Punkte A und B längs ihrer Tangenten bewegen. Das ist nur möglich, wenn die Bewegung eine momentane Drehung um den Schnittpunkt P der beiden Berührungsnormalen ist. P ist also der Pol der Bewegung.

§ 12. Umkehrung der Bewegung.

Da es bei der Bewegung zweier Ebenen stets nur auf die relative Lage der einen Ebene gegenüber der anderen ankommt, so ist es gleich, welche der beiden Ebenen als die ruhende angesehen wird. Die Lage der Pole ändert sich dadurch nicht, und die Rollkurven bleiben dieselben. Nur wird die ruhende Polbahn zur beweglichen, die bewegliche zur ruhenden Polbahn.

§ 13. Beschleunigungspol.

Wie wir oben sahen, beschreiben bei der allgemeinen Bewegung einer Ebene gegenüber einer anderen alle ihre Punkte krummlinige Bahnen und haben daher Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Nur der Geschwindigkeitspol allein besitzt keine Geschwindigkeit. Es liegt nahe zu fragen, ob es auch einen Punkt gibt, der keine Beschleunigung hat und den wir Beschleunigungspol nennen wollen.

Vorausgesetzt, es gäbe einen solchen, so darf er weder Tangential- noch Normalbeschleunigung haben; d. h. er muß den beiden Bedingungen unterworfen sein

$$p_t = \frac{dv}{dt} = 0\,,$$

$$p_n = \frac{v^2}{\varrho} = 0\,.$$

Der Geschwindigkeitspol befindet sich momentan in Ruhe. Im nächsten Augenblick nimmt er eine Geschwindigkeit an; er muß also eine Beschleunigung haben und kann daher nicht zugleich Beschleunigungspol sein.

Dann muß der Beschleunigungspol ein Punkt sein, der selbst eine endliche Geschwindigkeit besitzt. Die erste der beiden obigen Bedingungen sagt uns, daß seine Geschwindigkeit v augenblicklich einen Maxi-

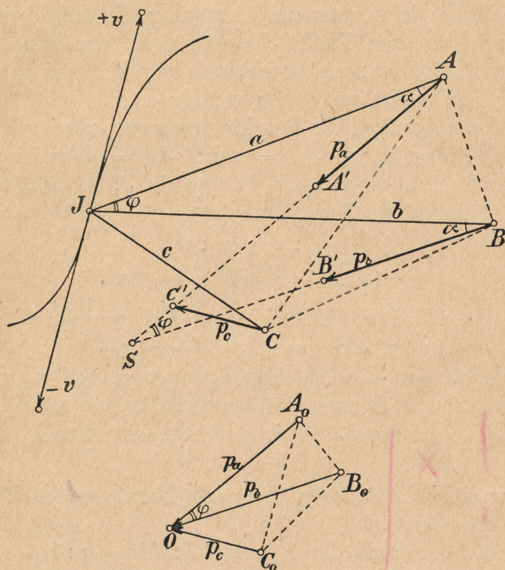


Fig. 14.

mal- oder Minimalwert hat. Die zweite Bedingung kann bei endlichem v nur erfüllt werden, wenn $\varrho = \infty$ wird, d. h. wenn sich der Punkt in einem Wendepunkte seiner Bahn befindet.

In Fig. 14 sei J der Beschleunigungspol, v seine Geschwindigkeit. Da diese während der unendlich kleinen Zeit dt konstant bleibt, so ändert man an den

Beschleunigungen der einzelnen Punkte der Ebene nichts, wenn man allen Punkten der Ebene eine zusätzliche Geschwindigkeit erteilt, die gleich der Geschwindigkeit v des Punktes J und entgegengesetzt gerichtet ist. Auf diese Weise kann man die Bewegung der Ebene in eine Drehung um den Punkt J verwandeln, der nun weder Geschwindigkeit noch Beschleunigung hat und also als fester Drehpunkt angesehen werden kann.

Sind p_a und p_b die Beschleunigungen zweier Punkte A und B der Ebene, $JA = a$ und $JB = b$ die Abstände dieser Punkte vom festen Drehpunkt J, so erhält man nach früherem (§ 7) die Beziehung

(1) $$p_a : p_b = a : b\,,$$

(2) $$\sphericalangle JAA' = \sphericalangle JBB' = \sphericalangle \alpha\,.$$

Ist S der Schnittpunkt von AA' und BB', so ist

(3) $$\sphericalangle ASB = \sphericalangle AJB = \sphericalangle \varphi\,.$$

Kennt man die Beschleunigungen p_a und p_b zweier Punkte A und B nach Größe und Richtung, so wird der Beschleunigungspol J somit als Spitze eines Dreiecks AJB mit

a) der Basis AB, dem ihr gegenüberliegenden Winkel $AJB = \varphi$ und

b) dem Verhältnis der Seiten $AJ : JB = a : b = p_a : p_b$ gefunden.

Die Bedingung a) ist erfüllt, wenn J mit A, B und S auf einem Kreise liegt, da dann $\sphericalangle AJB = \sphericalangle ASB = \sphericalangle \varphi$ gleiche Peripheriewinkel über der Sehne AB sind.

Die Bedingung b) wird erfüllt, wenn J auf einem Halbkreise liegt, welcher über der Verbindungslinie der Punkte U und V geschlagen ist, die AB innen und außen im Verhältnis $p_a : p_b$ teilen (Apollonischer Lehrsatz).

Zu einer bequemeren Ermittlung von J führt folgende Überlegung:

Trägt man die Beschleunigung p_a und p_b in wahrer Größe und Richtung von einem Punkte O aus in einem besonderen Beschleunigungsplan auf, so daß $A_0 O = p_a$, $B_0 O = p_b$, so ist

$$\sphericalangle A_0 O B_0 = \sphericalangle ASB = \sphericalangle AJB = \sphericalangle \varphi .$$

Da nun

$$p_a : p_b = a : b ,$$

so sind die Dreiecke $\triangle A_0 O B_0$ und $\triangle AJB$ ähnlich.

Trägt man für einen beliebigen anderen Punkt C mit Abstand $CJ = c$ und der Beschleunigung $p_c = CC'$ im Beschleunigungsplan seine Beschleunigung $C_0 O = p_c$ nach Größe und Richtung ein, so ergibt sich analog wie oben

$$\triangle C_0 O B_0 \sim \triangle CJB ,$$
$$\triangle C_0 O A_0 \sim \triangle CJA ,$$

und man erkennt, daß auch

$$\triangle A_0 B_0 C_0 \sim \triangle ABC .$$

Kennt man also die Beschleunigung p_a und p_b zweier Punkte A und B und will man diejenige p_c eines beliebigen anderen Punktes C der Ebene finden, so muß man im Beschleunigungsplan über $A_0 B_0$ das dem Dreieck ABC ähnliche Dreieck $A_0 B_0 C_0$ errichten und findet sodann $C_0 O = p_c$ in richtiger Größe und Richtung.

Zu jedem Punkte der Ebene gehört somit ein bestimmter Punkt des Beschleunigungsplanes und umgekehrt. Zum Punkte O des Beschleunigungsplanes gehört die Beschleunigung $p = 0$; er muß also dem Beschleunigungspol J entsprechen. Diesen findet man demnach, wenn man über AB als Basis $\triangle AJB \sim \triangle A_0 O B_0$ konstruiert.

Da im Beschleunigungsplan stets ein einziger Punkt O existiert, zu dem es keine Beschleunigung gibt, so erkennt man hieraus, daß es stets einen einzigen Punkt J

der bewegten Ebene gibt, der keine Beschleunigung hat; d. h.: Es gibt stets einen, aber nur einen einzigen Beschleunigungspol.

§ 14. Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits- und Beschleunigungspol. Wendekreis und Wechselkreis.

Die relative Bewegung zweier Ebenen sei durch die Polkurven π und p, die sich zur Zeit t im Momentanpol P

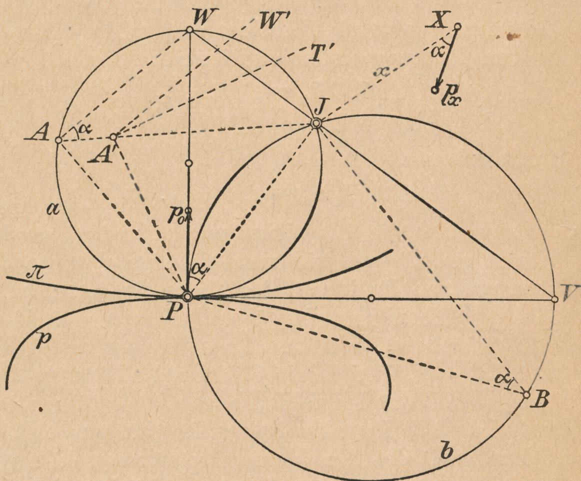


Fig. 15.

berühren, und durch den augenblicklichen Beschleunigungspol J gegeben. (Fig. 15). Es seien weiter durch P und J zwei Kreise a und b so gezeichnet, daß die Polkurven in P von a berührt, von b dagegen senkrecht geschnitten werden.

Der Pol P hat momentan keine Geschwindigkeit, erhält aber nach der unendlich kleinen Zeit dt eine solche und zwar in Richtung der Normalen in P, die den Kreis a in W schneiden möge. P hat also eine Beschleunigung p_0, die in die Richtung der Normalen PW fällt und mit dem Strahl PJ den Winkel $WPJ = \alpha$ bilden möge. Die Beschleunigung p_x jedes anderen Punktes X der Ebene muß mit dem Strahl XJ den gleichen Winkel α bilden.

Verbinden wir einen beliebigen Punkt A des Kreises a mit P, J und W, so ist $\sphericalangle WAJ = \sphericalangle WPJ = \alpha$ als Peripheriewinkel über gleichem Bogen und damit AW die Richtung der Beschleunigung p_a. Da nun $\sphericalangle WAP = 90°$ als Peripheriewinkel über einem Halbkreis, AP die augenblickliche Bahnnormale des Punktes A und somit AW seine augenblickliche Bahntangente ist, so fällt die Gesamtbeschleunigung des Punktes A in die Tangente seiner Bahn; d. h. der Punkt A hat nur eine Tangentialbeschleunigung und keine Normalbeschleunigung. Es muß also für ihn

$$p_n = \frac{v_a^2}{\varrho_a} = 0$$

sein. Da seine Drehgeschwindigkeit v_a um den Pol P einen endlichen Wert hat, so kann $p_n = 0$ nur dann werden, wenn der Krümmungsradius seiner Bahn $\varrho_a = \infty$ ist; d. h. der Punkt A und damit alle anderen Punkte des Kreises a befinden sich in Wendepunkten ihrer Bahnen. Der Kreis a heißt daher der Wendekreis.

Jeder beliebige andere Punkt A' innerhalb oder außerhalb des Wendekreises, der auf AJ gelegen ist, hat eine Beschleunigung $A'W' \parallel AW$. Da aber seine Bahntangente $A'T' \perp A'P$ sein muß, so fällt $A'W'$ mit $A'T'$

nicht mehr zusammen, d. h. A' muß eine Normalbeschleunigung haben und kann sich daher nicht in einem Wendepunkte seiner Bahnkurve befinden. Damit ist erwiesen, daß der Wendekreis der geometrische Ort aller Punkte überhaupt ist, die sich im betrachteten Augenblick in Wendepunkten ihrer Bahn befinden.

Verbinden wir einen beliebigen Punkt B des Kreises b mit P und J, so ist $\sphericalangle JBP = \sphericalangle JPW = \alpha$, weil Peripherie- und Sehnentangentenwinkel über gleichem Bogen gleich sind. Die Beschleunigung p_b von Punkt B fällt also mit der Bahnnormalen BP zusammen. Der Punkt B und mit ihm alle Punkte des Kreises b haben daher nur eine Normalbeschleunigung, aber keine Tangentialbeschleunigung. Es muß also für diese Punkte

$$p_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

sein; d. h. die Geschwindigkeiten aller Punkte des Kreises b haben augenblicklich einen Maximal- oder Minimalwert. Da die Tangentialbeschleunigung in diesen Punkten in eine Verzögerung oder umgekehrt übergeht, also ihr Vorzeichen wechselt, so heißt dieser Kreis der Wechselkreis.

Analog wie vorher läßt sich zeigen, daß es weder innerhalb noch außerhalb des Wechselkreises Punkte B' gibt, deren Tangentialbeschleunigung $p_t = 0$ wird, und wir erhalten damit den Satz:

Der Wechselkreis ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Geschwindigkeit einen Maximal- oder Minimalwert besitzt.

Sind P und P' zwei benachbarte Momentanpole (Fig. 16), wobei $PP' = ds$, und ist die momentane Winkelgeschwindigkeit um den Pol ω, die Winkelbeschleunigung ε, während

der Pol selbst seine Lage auf den Polbahnen mit der Polwechselgeschwindigkeit

$$u = \frac{ds}{dt}$$

ändert, so hat P nach der Zeit dt die Geschwindigkeit

$$\varDelta v = \omega \cdot ds$$

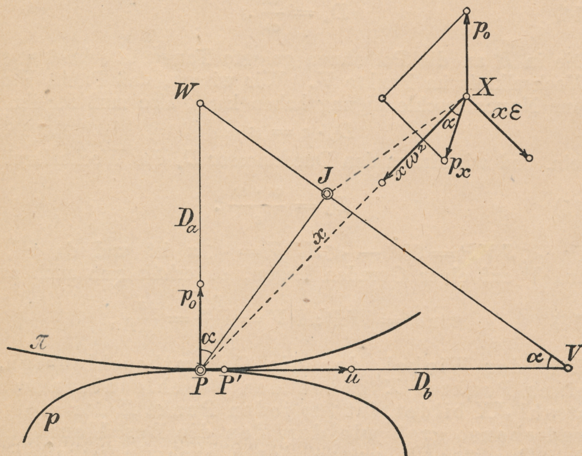


Fig. 16.

angenommen. Die Beschleunigung des Punktes P ist also

(13) $$p_0 = \frac{\varDelta v}{dt} = \omega \cdot \frac{ds}{dt} = \omega \cdot u\,.$$

Jeder beliebige Punkt X mit dem Polabstand $PX = x$ hat infolge der Drehung um den Pol die Normalbeschleunigung

$$p_n = x\,\omega^2$$

und die Tangentialbeschleunigung

$$p_t = x\,\varepsilon\,.$$

Außerdem muß er noch die Beschleunigung p_0 des Poles selbst haben.

Vom Punkte W im Abstand $PW = D_a$ wissen wir, daß er nur die Tangentialbeschleunigung $D_a \cdot \varepsilon$ haben kann. Daher müssen sich die übrigen Beschleunigungen aufheben, d. h. es muß

$$D_a \omega^2 = \hat{-} u \cdot \omega$$

sein, woraus sich der Durchmesser D_a des Wendekreises ergibt.

$$(14) \qquad D_a = \frac{u}{\omega}.$$

Die in P an die Polbahnen gelegte Tangente schneide den Wechselkreis im Punkte V. Wir wissen, daß Punkt V nur eine Normalbeschleunigung haben kann, also muß für ihn

$$D_b \cdot \varepsilon = u \cdot \omega$$

sein, und wir finden den Durchmesser D_b des Wechselkreises

$$(15) \qquad D_b = \frac{u \cdot \omega}{\varepsilon}.$$

Da $\sphericalangle JVP = 90° - \sphericalangle JPV = \sphericalangle \alpha$ ist und da W, J und V auf einer Geraden liegen, so erhält man auch noch

$$(16) \qquad \tan\alpha = WP : PV = \frac{D_a}{D_b} = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

d. h. der Winkel, den die Gesamtbeschleunigung eines Punktes X gegen den Beschleunigungspolstrahl JX bildet, ist für jeden Punkt X der gleiche und ebenso groß wie der, den die Beschleunigung des Punktes X gegen den Geschwindigkeitspolstrahl PX bilden würde, wenn der Geschwindigkeitspol ein fester Drehpunkt wäre.

§ 15. Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Bahn eines bewegten Punktes nach Hartmann.

Der Punkt A (Fig. 17) lege als Punkt einer bewegten Ebene E_1 gegen die ruhende Ebene E_0 in der Zeit dt mit der momentanen Geschwindigkeit $v_a = AV_a$ das Wegelement $AA_1 = ds$ seiner Bahnkurve c zurück, deren Krümmungsmittelpunkt in A mit C_a, deren Krümmungsradius mit $AC_a = R$ bezeichnet sei.

Man kann dann die Bewegung von A allein als eine Drehung um C_a mit der Winkelgeschwindigkeit ω_c ansehen. Da

$$v_a = \frac{ds}{dt} = R \cdot \omega_c$$

ist, so erhält man für den Krümmungsradius den Wert

$$AC_a = R = \frac{v^a}{\omega_c}.$$

Auf AC_a liegt der Momentanpol P von E_1 gegen E_0. Dieser ändert seine Lage auf der ruhenden Polkurve p mit der „Polwechselgeschwindigkeit“ $PU = u$, die in die beiden Komponenten $u_a \perp PC_a$ und $u_c \parallel PC_a$ zerlegt werden kann; d. h. der Pol P verschiebt sich auf dem sich drehenden Strahl AC_a mit der Geschwindigkeit u_c und dreht sich gleichzeitig um C_a mit u_a. Da P während der Bewegung von A nach A_1 den Strahl AC_a nicht verlassen kann, so muß

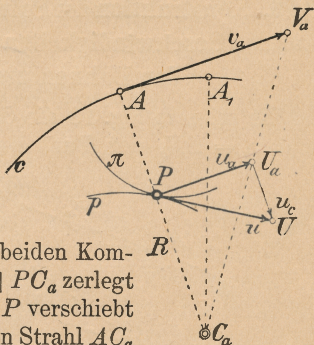


Fig. 17.

$$u_a = \overline{PC_a} \cdot \omega_c$$

oder

$$\omega_c = \frac{u_a}{\overline{PC_a}}$$

oder

$$\frac{AC_a}{PC_a} = \frac{v_a}{u_a}$$

sein; d. h. verbinden wir die Endpunkte V_a und U_a miteinander, so geht diese Verbindungslinie durch den Krümmungsmittelpunkt C_a.

Man findet also aus der Geschwindigkeit $AV_a = v_a$ von A und der Polwechselgeschwindigkeit u des Poles P den Krümmungsmittelpunkt C_a, indem man die Komponente $u_a = PU_a$ von u senkrecht zu AP ermittelt und die Gerade AP und V_aU_a in C_a zum Schnitt bringt.

§16. Konstruktion der Polwechselgeschwindigkeit u aus den Geschwindigkeiten und Krümmungszentren der Bahnen zweier Punkte.

Es seien in Fig. 18 die Geschwindigkeiten $v_a = AV_a$ und $v_b = BV_b$ der Punkte A und B einer bewegten

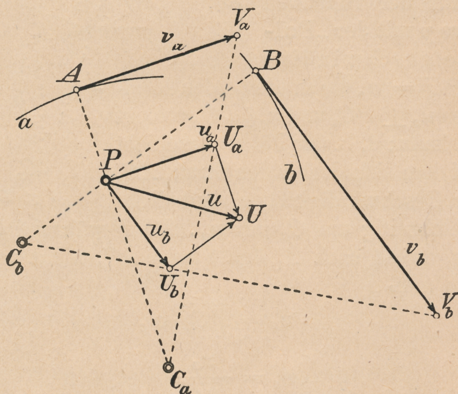


Fig. 18.

Ebene E_1 gegenüber der ruhenden Ebene E_0 und die augenblicklichen Krümmungszentren C_a und C_b ihrer Bahnen a und b bekannt. Dann ist der Momentanpol P von E_1 gegen E_0 als der Schnittpunkt der Bahnnormalen AC_a und BC_b gegeben.

Zieht man durch P die Parallelen zu v_a und v_b bis zu ihren Schnittpunkten U_a und U_b mit den Strahlen $V_a C_a$ und $V_b C_b$ und durch U_a bzw. U_b die Parallelen zu AP bzw. BP, die sich in U schneiden mögen, so ist $PU = u$ die Polwechselgeschwindigkeit nach Größe, Richtung und Sinn; damit ist auch PU die Tangente an die Polkurven in P und die dazu Senkrechte in P die Richtungslinie der Beschleunigung p_0 des Poles P

III. Ebene Bewegung dreier Ebenen.

§ 17.

Es mögen sich die drei Ebenen E_1, E_2, E_3 gegeneinander bewegen. Wenn wir uns als Beobachter auf eine der Ebenen stellen und damit alle ihre Bewegungen mitmachen würden, so müßte uns diese Ebene als eine feste Ebene erscheinen und wir könnten die Relativbewegung der beiden anderen gegen diese Ebene beobachten. Es steht uns frei, eine der Ebenen als eine solche „feste Ebene" jederzeit anzusehen. Wir wollen die Ebene E_1 als feste Ebene wählen und mit der Papierebene zusammenfallen lassen.

Denkt man sich während der Bewegung eine Stelle A durch einen plötzlichen Nadelstich auf allen drei Ebenen markiert, so sollen die drei übereinander liegenden Punkte je nach der Ebene, der sie angehören, die Buchstaben A_1, A_2, A_3 erhalten. Entsprechend mögen die Geschwindigkeiten dieser Punkte v_{31}, v_{21} und v_{23}, die Beschleunigungen p_{31}, p_{21} und p_{23} heißen, wobei z. B. v_{31} die Geschwindigkeit bedeutet, die ein Punkt als Punkt der Ebene E_3 gegenüber der Ebene E_1 hat. Umgekehrt würde die Geschwindigkeit des Punktes als Punkt der

Ebene E_1 gegen die Ebene E_3 mit v_{13} zu bezeichnen sein; hierbei muß offenbar

$$v_{31} = -v_{13}$$

werden.

Zwei Schiebungen gegen die feste Ebene.

Es sei zunächst angenommen, beide Ebenen E_2 und E_3 machen gegen E_1 Schiebungen. Dann bleiben ihre beiden sich augenblicklich mit a_1 deckenden Geraden a_2 und a_3 während der ganzen Bewegung zu a_1 parallel. a_2 und a_3 bleiben also auch unter sich parallel und wir finden, daß die Relativbewegung zweier Ebenen, die gegen eine dritte Schiebungen vollführen, ebenfalls wieder eine Schiebung ist.

Umgekehrt können wir auch sagen, daß wir die Schiebung einer Ebene gegen eine zweite mit der Schiebung dieser zweiten gegen eine dritte zu einer Schiebung der ersten gegen die dritte zusammensetzen können.

Kennt man die Bahnkurve c_{32} eines Punktes A_3 gegenüber der Ebene E_2, sowie das zugehörige Bewegungsgesetz $s_{32} = f_{32}(t)$ und die Bahn c_{21} eines Punktes A_2 gegen E_1 mit dem Bewegungsgesetz $s_{21} = f_{21}(t)$, so kann man in jedem Zeitpunkte die Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Punktes A_3 gegen die feste Ebene E_1 mit Hilfe der Parallelogramme der Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen finden.

Infolge der Schiebung müssen alle anderen Punkte der Ebene E_3 sich vollkommen gleichartig mit A_3 bewegen.

§ 18. Schiebung einer Ebene und Drehung einer anderen um einen festen Punkt der ersten.

Die Ebene E_3 möge sich um den festen Punkt P der Ebene E_2 drehen, die ihrerseits gegen die feste

Ebene E_1 eine Schiebung ausführt. Ein beliebiger Punkt A_3 (Fig. 19) der Ebene E_3 im Abstand a vom Drehpunkt P hat gegen E_2 die Geschwindigkeit

$$v_{32} = a \cdot \omega ,$$

wenn ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehung um P ist. Der sich mit A_3 deckende Punkt A_2

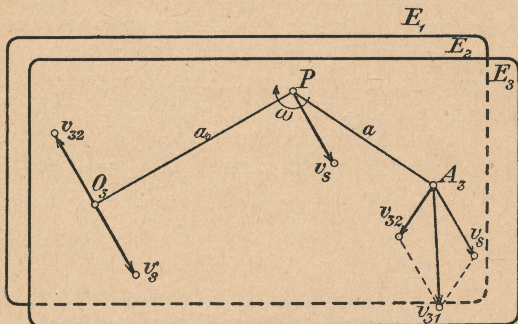


Fig. 19.

hat die Schiebungsgeschwindigkeit v_s. Die wirkliche Geschwindigkeit v_{31} des Punktes A_3 gegen E_1 wird daher als Resultierende aus v_{32} und v_s gefunden, d. h.

$$v_{31} = v_{32} \mathbin{\hat{+}} v_s .$$

Offenbar wird es einen Punkt O_3 geben, der gegen Ebene E_1 in Ruhe ist; für diesen muß

$$v_{32} \mathbin{\hat{+}} v_s = 0$$

werden; d. h. v_{32} und v_s müssen von gleicher Größe und entgegengesetzt gerichtet sein, also

$$v_{32} = \hat{-}\, v_s , \qquad a_0 \cdot \omega = v_s ,$$

$$a_0 = \frac{v_s}{\omega} .$$

Der Punkt O_3 muß auf einer in P auf der Schiebungsgeschwindigkeit v_s errichteten Senkrechten liegen und zwar nach der Seite hin, nach welcher v_s bei einer im Sinne von ω vorgenommenen Drehung um 90° zeigen würde.

Man erkennt leicht, daß es nur einen solchen Punkt O_3 gibt, der sich gegen Ebene E_1 in absoluter Ruhe befindet. Wir erhalten also durch die Zusammensetzung der Schiebung von E_2 gegen E_1 und der Drehung von E_3 gegen E_2 um P eine neue Drehung von E_3 gegen E_1 um O_3. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung ω_0 erhält man, wenn man bedenkt, daß der Punkt P_3 die Drehgeschwindigkeit $v_{32} = 0$ und daher als Punkt P_3 der Ebene E_3 gegen E_1 die absolute Geschwindigkeit

$$v_{31} = v_s$$

hat. Damit muß

$$a_0 \, \omega_0 = v_s \, ,$$

$$\omega_0 = \frac{v_s}{a_0} = \frac{v_s}{\frac{v_s}{\omega}} = \omega$$

werden. Die neue Drehung um O findet also mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit statt, wie die ursprüngliche um P (auch dem Sinne nach gleich).

§ 19. Drehung zweier Ebenen gegen eine dritte um feste Punkte.

Die Ebenen E_2 und E_3 (Fig. 20) mögen sich gegen die ruhende Ebene E_1 um die festen Punkte P_{21} und P_{31} mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_{21} und ω_{31} drehen. Ein Punkt A mit den Abständen a_2 und a_3 von den

Drehpunkten P_{21} und P_{31} hat dann gegen E_1 die Geschwindigkeiten

$$v_{21} = a_2 \cdot \omega_{21},$$
$$v_{31} = a_3 \cdot \omega_{31},$$

je nachdem er als Punkt A_2 der Ebene E_2 oder als Punkt A_3 der Ebene E_3 angesehen wird. Hierbei steht

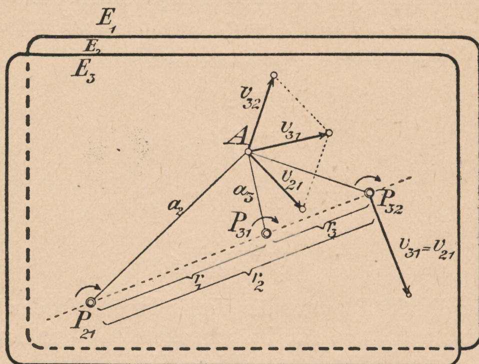


Fig. 20.

$v_{21} \perp AP_{21}$ und $v_{31} \perp AP_{31}$. Infolge der Relativbewegung von E_3 gegen E_2 hat er als Punkt A_3 gegen E_2 die Geschwindigkeit v_{32}. Offenbar muß man v_{31} als geometrische Summe von v_{32} und v_{21} erhalten, d. h.

$$v_{31} = v_{32} \hat{+} v_{21}.$$

Ließe sich ein Punkt A so finden, daß er als Punkt A_3 gegen Ebene E_2 in relativer Ruhe wäre, so würde sich dieser Punkt als Drehpunkt der Ebene E_3 gegen Ebene E_2 auffassen lassen. Für einen solchen Punkt müßte also

$$v_{32} = 0,$$
$$v_{31} = \hat{+} v_{21}$$

sein; d. h. er müßte sowohl als A_3 wie als A_2 gegen E_1 gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeiten haben. Gleichgerichtet können diese beiden Geschwindigkeiten nur sein, wenn ihre Normalen AP_{21} und AP_{31} in eine Gerade, also in die Richtung $P_{21}P_{31}$ fallen, d. h. der betreffende Punkt muß auf die Verbindungslinie der beiden anderen Drehpunkte in die Lage P_{32} fallen. Bezeichnet man $P_{21}P_{32} = r_2$, $P_{31}P_{32} = r_3$, so sind die Geschwindigkeiten des Punktes P_{32}

$$v_{21} = r_2\,\omega_{21}\,,$$

$$v_{31} = r_3\,\omega_{31}$$

gleich, wenn

$$r_2\,\omega_{21} = r_3\,\omega_{31}\,,$$

$$\frac{r_2}{r_3} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}}\,,$$

d. h. der Punkt P_{32} teilt die Verbindungslinie der beiden Drehpunkte P_{21} und P_{31} im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten. Diese Teilung findet außen statt, wenn ω_{21} und ω_{31} gleichen Drehsinn haben, innen dagegen, wenn beide Winkelgeschwindigkeiten in ungleichem Sinne drehen.

Wir erkennen daraus, daß die Relativbewegung zweier sich gegen eine dritte Ebene drehenden Ebenen wiederum eine Drehung ist. Der Drehpunkt liegt auf der Verbindungslinie der beiden anderen Drehpunkte und teilt sie im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten.

Die Umkehrung dieses Satzes ergibt, daß sich die Relativdrehung einer Ebene gegen eine zweite mit deren Drehung gegen eine dritte zu einer Drehung der ersten gegen die dritte zusammensetzen läßt.

Ist $P_{21}P_{31} = r_1$, so finden wir die Abstände r_3 und r_2 aus der Beziehung:

a) wenn ω_{21} und ω_{31} gleichen Drehsinn haben:

$$r_2 - r_3 = r_1 \,,$$

$$\frac{r_2}{r_3} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} \,,$$

$$r_2 = r_1 \cdot \frac{\omega_{31}}{\omega_{31} - \omega_{21}} \,,$$

$$r_3 = r_1 \cdot \frac{\omega_{21}}{\omega_{31} - \omega_{21}} \,;$$

b) wenn ω_{21} und ω_{31} entgegengesetzten Drehsinn haben:

$$r_2 + r_3 = r_1 \,,$$

$$\frac{r_2}{r_3} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} \,,$$

$$r_2 = r_1 \cdot \frac{\omega_{31}}{\omega_{31} + \omega_{21}} \,,$$

$$r_3 = r_1 \cdot \frac{\omega_{21}}{\omega_{31} + \omega_{21}} \,.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω_{32} der Relativdrehung von E_3 gegen E_2 erhält man, wenn man bedenkt, daß für den Punkt P_{31} die Beziehung bestehen muß

$$v_{31} = v_{32} \hat{+} v_{21} = 0 \,,$$

$$v_{32} = \hat{-} v_{21} \,.$$

Nun sind im Falle a)

$$v_{32} = -r_3 \, \omega_{32} \,,$$

$$v_{21} = r_1 \, \omega_{21} \,,$$

also

$$r_3 \, \omega_{32} = r_1 \, \omega_{21} \,,$$

$$\omega_{32} = r_1 \frac{\omega_{21}}{r_3} = \omega_3 \; - \omega_{21} \,,$$

wogegen im Falle b)

$$v_{32} = -r_3 \, \omega_{32} \,,$$

$$v_{21} = r_1 \, \omega_{21} \,,$$

also

$$r_3\,\omega_{32} = r_1\,\omega_{21}$$

$$\omega_{32} = \frac{r_1\,\omega_{21}}{r_3} = \omega_{31} + \omega_{21}$$

wird. Die Relativdrehung von E_3 gegen E_2 erfolgt also mit einer Winkelgeschwindigkeit im Falle a) gleich der Differenz, im Falle b) gleich der Summe der beiden anderen Winkelgeschwindigkeiten.

§ 20. Die Pole dreier beliebig bewegter Ebenen.

Die drei Ebenen E_1, E_2, E_3 (Fig. 21) mögen sich beliebig gegeneinander bewegen. E_1 soll wieder als feste Ebene angesehen werden. Dann kann man die augenblickliche Bewegung von E_2 gegen E_1 als Drehung um einen Momentanpol P_{21} und ebenso die Bewegung von E_3 gegen E_2 als Drehung um einen Momentanpol P_{32} auffassen. Wir können diese beiden Momentandrehungen auf Grund des vorigen Abschnitts zu einer resultierenden Drehung von E_3 gegen E_1 um einen Drehpunkt P_{31} zusammensetzen, der auf die Verbindungslinie $P_{21}\,P_{32}$ fallen und der Momentanpol der Ebene E_3 gegen E_1 sein muß. Wir erhalten damit den sogenannten Polsatz:

Die drei Momentanpole von drei sich beliebig bewegenden Ebenen liegen stets auf einer Geraden, der Polgeraden der drei Ebenen.

§ 21. Die Geschwindigkeiten dreier beliebig bewegter Ebenen.

Die drei sich momentan in A (Fig. 21) deckenden Punkte A_1, A_2, A_3 der drei Ebenen haben je nach der Ebene, der sie angehören, und der Ebene, gegen die sie sich bewegen, die folgenden sechs verschiedenen Relativgeschwindigkeiten:

Punkt A_1 besitzt v_{12} gegen Ebene E_2 ,
" A_1 " v_{13} " " E_3 ,
" A_2 " v_{21} " " E_1 ,
" A_2 " v_{23} " " E_3 ,
" A_3 " v_{31} " " E_1 ,
" A_3 " v_{32} " " E_2 .

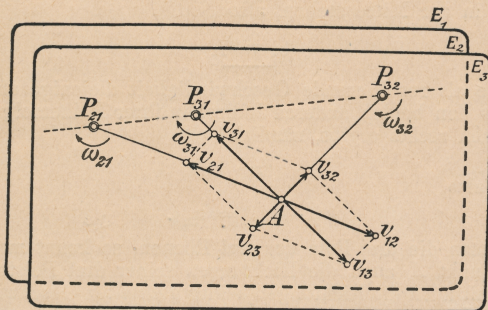


Fig. 21.

Hierbei sind je zwei Geschwindigkeiten dem absoluten Werte nach gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, und zwar sind

$$v_{12} = \hat{-}\, v_{21}\,; \quad v_{23} = \hat{-}\, v_{32}\,; \quad v_{31} = \hat{-}\, v_{13}\,.$$

Wie früher (§ 9) mögen alle Geschwindigkeiten im Uhrzeigersinne um 90° gedreht werden, so daß sie in die Polstrahlen fallen. Die Einzeichnung der sechs Geschwindigkeiten in die Figur liefert dann das G e s c h w i n d i g k e i t s - s e c h s e c k und man erkennt, daß sich je zwei Geschwindigkeiten geometrisch, d. h. nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten, zu der dritten zusammensetzen lassen. Es sind nämlich

$v_{32} \mathbin{\hat{+}} v_{21} = v_{31}$	$v_{12} \mathbin{\hat{+}} v_{23} = v_{13}$
$v_{21} \mathbin{\hat{+}} v_{13} = v_{23}$	$v_{31} \mathbin{\hat{+}} v_{12} = v_{32}$
$v_{13} \mathbin{\hat{+}} v_{32} = v_{12}$	$v_{23} \mathbin{\hat{+}} v_{31} = v_{21}$.

Man achte auf die Gesetzmäßigkeit in der Reihenfolge der Indizes. Jede Geschwindigkeit hat zwei Ziffern als Index, von denen die erste die Ebene angibt, der der Punkt angehört, die zweite jene Ebene bezeichnet, gegen die seine Geschwindigkeit zu ermitteln ist. Will man wissen, zu welcher resultierenden Geschwindigkeit sich zwei Geschwindigkeiten, z. B. v_{32} und v_{21}, zusammensetzen lassen, so schreibe man ihre geometrische Summe in der Reihenfolge, daß ihre gleichen Indizes in der Mitte stehen, also

$$v_{3\underbrace{2 \;\hat{+}\; v_2}1}$$

und lese als resultierende Geschwindigkeit diejenige ab, die sich aus den beiden anderen Indizes in ihrer Reihenfolge von links nach rechts ergibt, nämlich

$$v_{31} ,$$

so daß also

$$v_{32} \hat{+} v_{21} = v_{31} .$$

Kennt man die drei Pole der drei Ebenen, so kennt man für jeden Punkt A auch die Richtungen seiner drei Polstrahlen und damit auch die Richtungen seiner gedrehten Geschwindigkeiten. Ist eine Geschwindigkeit dann der Größe nach gegeben, so sind damit alle anderen Geschwindigkeiten des Geschwindigkeitssechsecks bekannt.

§ 22. Die Beschleunigungen dreier beliebig bewegter Ebenen.

Die drei sich momentan in A deckenden Punkte $A_1\, A_2\, A_3$ der drei Ebenen haben analog den Geschwindigkeiten die folgenden sechs Relativbeschleunigungen:

Punkt	A_1	hat	p_{12}	gegen	Ebene	E_2 ,
„	A_1	„	p_{13}	„	„	E_3 ,
„	A_2	„	p_{21}	„	„	E_1 ,
„	A_2	„	p_{23}	„	„	E_3 ,
„	A_3	„	p_{31}	„	„	E_1 ,
„	A_3	„	p_{32}	„	„	E_2 ,

wovon ebenfalls wieder je zwei einander dem absoluten Werte nach gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind; nämlich

$$p_{12} = \hat{-} p_{21}\,; \quad p_{23} = \hat{-} p_{32}\,; \quad p_{31} = \hat{-} p_{13}\,.$$

Im Gegensatz zu den Geschwindigkeiten ergeben aber zwei dieser sechs Beschleunigungen im allgemeinen nicht eine andere dieser Gruppe; sondern es gehört zu jedem Paar noch eine weitere Zusatzbeschleunigung, die von ihrem Entdecker Coriolis den Namen „Coriolis-Beschleunigung" trägt. Erst mit dieser zusammen geben die beiden ersten eine andere der sechs oben angegebenen Beschleunigungen.

§ 23. Die Coriolis-Beschleunigung.

Um die Größe und Richtung der Coriolis-Beschleunigung zu ermitteln, möge ein Punkt A_2, (Fig. 22) der zur Zeit t_0 die Lage A_0 gegenüber der festen Ebene E inne hat, während seiner im Zeitelement dt vor sich gehenden Bewegung beobachtet werden.

Als Punkt A_2 bewegt er sich relativ zur Ebene E_1 auf einer Bahnkurve σ_0 und besitzt zur Zeit t_0 die Geschwindigkeit v_{σ_0} gegenüber E_1. Als Punkt A_1 bewegt er sich mit E_1 innerhalb der unendlich kleinen Zeit dt auf einem Kreisbogen ϱ_0 um den Momentanpol O der Ebene E_1 gegen E und zwar mit der Geschwindigkeit

$$v_{\varrho_0} = r\,\omega_{\varrho_0} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}\,.$$

Hierin bedeuten: $A_0 O = r$ der Polabstand, $d\varphi$ der in der Zeit dt um O beschriebene Drehwinkel und ω_{ϱ_0} die momentane Winkelgeschwindigkeit der Ebene E_1 um O gegenüber E.

Die tatsächliche Bahn des Punktes A_2 gegen E ist das Resultat aus den beiden Einzelbewegungen auf σ_0 und ϱ_0 und möge mit τ bezeichnet werden. Zur Zeit t_0 ist nach früherem die tatsächliche Geschwindigkeit v_{τ_0} des Punktes A_2 gegen E

$$v_{\tau_0} = v_{\sigma_0} \hat{+} v_{\varrho_0} .$$

Wenn E_1 gegen E in Ruhe wäre, würde A_2 in dt sec

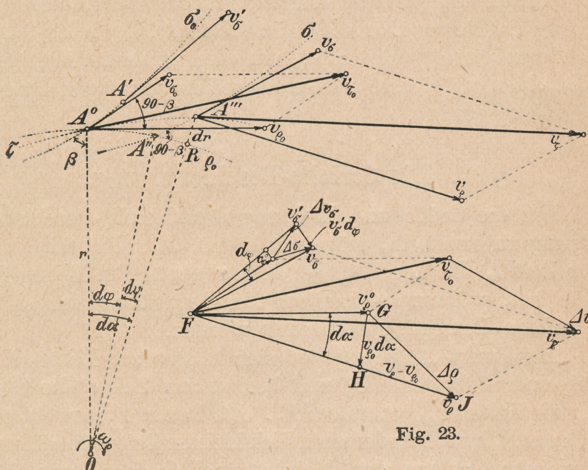


Fig. 22.

Fig. 23.

nach A' wandern und dabei das Wegelement $A_0A' = v_{\sigma_0} dt$ zurücklegen. Wenn dagegen A_2 gegenüber E_1 in Ruhe wäre, so müßte A_2 nach dieser Zeit nach A'' gewandert sein und dabei das Wegelement $A_0A'' = v_{\varrho_0} \cdot dt$ beschrieben haben. In Wirklichkeit finden beide Einzelbewegungen gleichzeitig statt und der Punkt A_2 bewegt sich tatsächlich innerhalb dt sec längs seiner Bahn τ in

die Lage A'''. Hier sei seine tatsächliche Geschwindigkeit gegenüber E v_τ geworden. Diese muß offenbar jetzt die Resultierende aus der Relativgeschwindigkeit v_σ, die A_2 gegen E_1 auf seiner Bahn σ im Punkte A''' besitzt, und der Drehgeschwindigkeit v_ϱ sein, die A_1 im Punkte A''' gegen E hat.

Damit sich während der Zeit dt die Geschwindigkeit v_{τ_0} nach Größe und Richtung in v_τ verändern kann, muß sie mit einer Elementarbeschleunigung $\Delta\tau$ zusammengesetzt werden, die ihrerseits die wirkliche Beschleunigung p_{τ_0} des Punktes A_2^0 gegen E zur Ursache hat.

Offenbar kann man $\Delta\tau$ in zwei Komponenten $\Delta\sigma$ und $\Delta\varrho$ zerlegen, von denen die erstere lediglich die Größen- und Richtungsänderung von v_{σ_0} in v_σ bewirkt, während die zweite lediglich die Geschwindigkeit v_{ϱ_0} in die Geschwindigkeit v_ϱ nach Größe und Richtung verwandelt.

Zunächst ist in Fig. 23 $\Delta\sigma$ aufgesucht. Bei ruhender Ebene E_1 würde sich v_{σ_0} in v'_σ infolge der Elementarbeschleunigung Δv_σ ändern; da aber die Bahn σ_0 nach dt sec in die Lage σ gekommen ist und damit auch ihre Tangentenrichtungen um den kleinen Drehwinkel $d\varphi$ verdreht worden sind, so muß v'_σ mit der Elementarbeschleunigung $v'_\sigma\,d\varphi$ zusammengesetzt werden, um v_σ zu ergeben. Um v_{σ_0} in v_σ zu verwandeln, bedarf es also der beiden Elementarbeschleunigungen:

1. $\Delta v_\sigma =$ die natürliche Elementarbeschleunigung, um die Geschwindigkeit des Punktes A_2 auf σ zu verändern,
2. $v'_\sigma\,d\varphi = v_\sigma\,d\varphi = v_\sigma\,\omega\,dt =$ eine zusätzliche Elementarbeschleunigung, deren Richtung senkrecht auf v_{σ_0} steht und zwar nach der Seite hin, nach welcher v_{σ_0} bei einer Drehung um 90° im Sinne von ω_{ϱ_0} zeigen würde.

In Fig. 23 ist auch die andere Komponente $\Delta\varrho = GJ$ ermittelt. Schneidet OA''' den Kreis ϱ_0 in R, wird

$RA''' = dr$, $\sphericalangle A_0 OA''' = d\alpha$, $\sphericalangle A'' O A''' = d\psi$ genannt und ist endlich $\sphericalangle A''A'''R = \sphericalangle \beta$ der Winkel der Relativbahn σ gegen OA''', so ist

$$A''A''' = A_0 A' = v_{\sigma_0} \cdot dt,$$

$$A''R = r \cdot d\psi = A''A''' \sin\beta = v_{\sigma_0}\, dt \sin\beta\,,$$

$$RA''' = dr = A''A''' \cos\beta = v_{\sigma_0} dt \cdot \cos\beta\,.$$

Weiter folgt

$$d\psi = \frac{v_{\sigma_0} dt \sin\beta}{r},$$

$$d\alpha = d\varphi + d\psi = d\varphi + \frac{v_{\sigma_0} dt \sin\beta}{r}.$$

Nun ist $v_{\varrho_0} \perp OA_0$, $v_\varrho \perp OA'''$; mithin ergibt sich der von v_{ϱ_0} und v_ϱ eingeschlossene Winkel $\sphericalangle GFJ = \sphericalangle d\alpha$. Man erhält v_ϱ aus v_{ϱ_0}, wenn man letzteres mit der Elementarbeschleunigung $GJ = \Delta\varrho$ zusammensetzt. Letztere aber kann wieder in die beiden rechtwinkligen Komponenten zerlegt werden:

(3) $GH = v_{\varrho_0} \cdot d\alpha$, welches die Richtungsänderung von v_{ϱ_0} in v_ϱ bedingt, und

(4) $HJ = v_\varrho - v_{\varrho_0}$, welches die Größenänderung von v_{ϱ_0} in v_ϱ hervorruft.

Man kann diese Elementarbeschleunigung weiter umormen, wenn man bedenkt, daß

$$v_{\varrho_0} = r \cdot \omega_{\varrho_0}$$

$$v_\varrho = (r + dr)(\omega_{\varrho_0} + d\omega_\varrho) = r\,\omega_{\varrho_0} + \omega_{\varrho_0} dr + r\, d\omega_\varrho$$

gesetzt werden kann. Führt man noch die Winkelbeschleunigung $\varepsilon_{\varrho_0} = \dfrac{d\omega_\varrho}{dt}$ der Ebene E_1 gegen E um

den Drehpol O ein, so kann man weiter schreiben:

$$(3a) \qquad GH = v_{\varrho_0} d\alpha = r\,\omega_{\varrho_0}\left[d\varphi + \frac{v_{\sigma_0} dt \sin\beta}{r}\right]$$
$$= r\,\omega_{\varrho_0}^2 dt + v_{\sigma_0}\omega_{\varrho_0} dt \sin\beta\,,$$

$$(4a) \qquad HJ = v_\varrho - v_{\varrho_0} = \omega_{\varrho_0} dr + r\,d\omega_\varrho$$
$$= v_{\sigma_0}\omega_{\varrho_0} dt \cos\beta + r\,\varepsilon_{\varrho_0} dt\,.$$

Die Elementarbeschleunigung GH wirkt in Richtung des Pohlstrahls OA''' und zerfällt in die beiden Teile

$$r\,\omega_{\varrho_0}^2 dt \quad \text{und} \quad v_{\sigma_0}\omega_{\varrho_0} dt \sin\beta\,.$$

Die Elementarbeschleunigung HJ wirkt senkrecht zum Polstrahl und besteht aus den beiden Teilen

$$r\,\varepsilon_{\varrho_0} dt \quad \text{und} \quad v_{\sigma_0}\omega_{\varrho_0} dt \cos\beta\,.$$

Dann lassen sich $r\,\omega_{\varrho_0}^2 dt$ und $r\,\varepsilon_{\varrho_0} dt$ zur Elementarbeschleunigung

$$(5) \qquad \Delta v_\varrho = \left[\sqrt{r^2\varepsilon_0^2 + r^2\omega_{\varrho_0}^4}\right] dt$$

des Punktes A_1^0 zur Zeit t_0 und ebenso $v_{\sigma_0}\omega_{\varrho_0} dt \sin\beta$ und $v_{\sigma_0}\omega_{\varrho_0} dt \cos\beta$ zu einer Elementarbeschleunigung

$$(6) \qquad v_{\sigma_0}\omega_{\varrho_0}\sqrt{\sin^2\beta + \cos^2\beta}\, dt = v_{\sigma_0}\omega_{\varrho_0} dt$$

zusammensetzen, die gegen den Polstrahl OA''' und im Grenzfall auch gegen OA_0 den Winkel $(90-\beta)$ bildet, also senkrecht auf v_{σ_0} steht. Da diese Elementarbeschleunigung nach Größe, Richtung und Richtungssinn mit der unter (2) gefundenen völlig übereinstimmt, so kann sie mit dieser in eine doppelt so große vereinigt werden.

Somit ergeben sich insgesamt die folgenden Elementarbeschleunigungen:

Ia. Δv_σ (siehe 1) = ist die natürliche Elementarbeschleunigung, um die Geschwindigkeitsänderung der Relativbewegung des Punktes A_2 auf σ zu bewirken,

IIa. Δv_ϱ (siehe 5) = die natürliche Elementarbeschleunigung, um die Geschwindigkeitsänderung des rotierenden Punktes A_1 auf ϱ zu bewirken,

IIIa. $2 v_{\sigma_0} \omega_{\varrho_0} dt$ [siehe 2) und 6)], eine Zusatz-Elementarbeschleunigung, die auf v_{σ_0} senkrecht steht und nach der Richtung zeigt, nach der v_{σ_0} bei einer im Sinne von ω_{ϱ_0} vorgenommenen Drehung um 90^0 zeigen würde.

Um diese Elementarbeschleunigungen zu erzeugen, müssen die folgenden 3 Beschleunigungen, die mit ihnen gleiche Richtung und gleichen Sinn haben, im Punkte A_0 auf A_2 wirken, um diesen Punkt längs seiner Bahn τ von A_0 nach A''' zu bringen:

I. $p_\sigma = \dfrac{\Delta v_\sigma}{dt}$ = die Relativbeschleunigung von A_2 gegen E_1,

II. $p_\varrho = \dfrac{\Delta v_\varrho}{dt}$ = die Rotationsbeschleunigung von A_1 gegen E,

III. $p_\gamma = \dfrac{2 v_{\sigma_0} \omega_{\varrho_0} dt}{dt} = 2 v_{\sigma_0} \omega_{\varrho_0}$ = Coriolisbeschleunigung in dem unter IIIa angegebenen Richtungssinn.

Besonderer Fall.

Der besondere Fall, bei welchem die Bewegung der Ebene E_1 gegen E eine Schiebung wird, tritt ein, wenn der Drehpunkt O beider Ebenen unendlich fern fällt und damit die Drehradien unendlich groß, die Winkelgeschwindigkeit ω_{ϱ_0} aber unendlich klein werden. In diesem Sonderfall nimmt die Coriolisbeschleunigung den Wert

$$p_\gamma = 2 v_{\sigma_0} \cdot \omega_{\varrho_0} = 0$$

an, d. h. sie verschwindet, und man hat nur noch die beiden ersten Komponenten I und II zur Resultierenden zusammenzusetzen, wenn man die tatsächliche Beschleunigung des Punktes A_2 gegen die Ebene E finden will.

IV. Die Zykloiden.

§ 24. Allgemeines.

Läßt man einen Kreis k_1 (Fig. 24) auf einem andern k_2 abrollen, ohne daß er gleitet, so beschreibt ein beliebiger

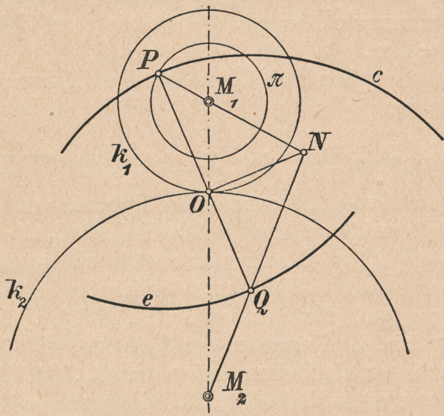


Fig. 24.

in seiner Ebene liegender Punkt P eine Zykloide c gegen k_2. Je nachdem k_1 außen oder innen auf k_2 rollt, unterscheidet man Epizykloiden und Hypozykloiden; je nach der Lage des erzeugenden Punktes P innerhalb, außerhalb oder auf der Peripherie des rollenden Kreises k_1 ergeben sich „verkürzte", „verlängerte" oder „gemeine" Zykloiden.

Rollt k_1 innerhalb eines doppelt so großen Kreises k_2 ab, so entartet die Zykloide zu einem Durchmesser des großen Kreises k_2, wenn P auf k_1 lag.

Wird der Mittelpunkt M_1 des Rollkreises als erzeugender Punkt gewählt, so gehen die von ihm beschriebenen Zykloiden in Kreise um M_2 über.

In allen diesen Fällen ist k_2 die feste, k_1 die bewegliche Polbahn der beiden Kreisebenen E_1 und E_2. Da der augenblickliche Berührpunkt O beider Kreise der Momentanpol der Bewegung ist, so muß die augenblickliche Bahnnormale der von P beschriebenen Zykloide c durch O gehen.

Hieraus ergeben sich folgende beiden Konstruktionen der Zykloide:

§ 25. Konstruktion der Zykloide als Hüllkurve.

Trägt man vom momentanen Berührpunkte O_1 (Fig. 25) aus auf Roll- und Grundkreis gleiche Teile ab $O_1 O_1' = O_2 O_2$, $O_1' O_1'' = O_2' O_2''$ usw., so kommen während des Abrollens die entsprechenden Teilpunkte beider Kreise als Pole in Deckung und die Geraden $P O_1$, $P O_1'$, $P O_1''$ usw. sind nacheinander Normalen der Zykloide. Schlägt man daher mit ihnen als Radien Kreise um O_2, O_2', O_2'' usw., dann müssen diese Kreise sämtlich die gesuchte Zykloide berühren und letztere kann auf diese Weise als Hüllkurve der ersteren gefunden werden.

§ 26. Punktweise Konstruktion der Zykloide.

Ist in Fig. 25 beim Abrollen von k_1 auf k_2 beispielsweise O_1'' mit O_2'' in Deckung gekommen, so hat sich O_2 in die Lage O'' begeben, die man findet, wenn man $\Delta\, O'' O_1 O_2'' \cong \Delta\, O_1'' O_2'' O_1$ macht. Das Dreieck $P O_1 O_1''$ verändert

zwar seine Lage, nicht aber seine Gestalt und Größe während des Rollens, so daß es, über $O'' O_2''$ als Basis errichtet, den Punkt P'' der Zykloide ergibt, in welchem

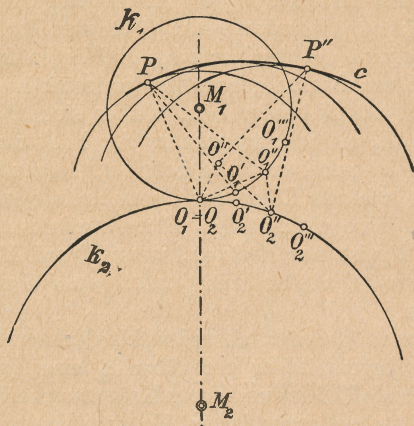


Fig. 25.

sich der erzeugende Punkt P befindet, wenn O_1'' Pol geworden ist.

§ 27. Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes nach Bobillier.

Lassen wir in Fig. 24 die beiden Kreise k_1 und k_2 sich so um ihre beiden festen Mittelpunkte M_1 und M_2 drehen, daß sie ohne Gleiten aufeinander rollen, so beschreibt der erzeugende Punkt P der ruhenden Ebene gegenüber einen Kreis π um M_1, gegen die Ebene E_2 dagegen die Zykloide c. Die Normale PO bewegt sich mit ihrem Fußpunkt P daher auf dem Kreise π, während

sie ständig durch O hindurchgleitet. Ihr momentaner Drehpunkt gegen die ruhende Ebene wird daher als Schnittpunkt N der in O auf PO errichteten Senkrechten ON mit dem Radius PM_1 des Kreises π gefunden.

Der Krümmungsmittelpunkt Q für den Punkt P der Zykloide c muß auf der Normalen PO liegen und daher wie alle deren Punkte gegenüber der festen Ebene einen Kreisbogen um N beschreiben. Da er sich aber gegen die Ebene E_2 als Schnittpunkt zweier Nachbarnormalen momentan in relativer Ruhe befindet, so muß er sich gegen die ruhende Ebene auf einem Kreisbogen um M_2 bewegen. Eine gleichzeitige Elementardrehung um N und um M_2 ist nur denkbar, wenn Q auf NM_2 liegt. Daher wird Q als Schnittpunkt von PO und NM_2 gefunden.

Rollt man k_2 auf k_1 ab und wählt Q als erzeugenden Punkt, so beschreibt er gegenüber k_1 eine Zykloide e, deren Normale QO ist und deren Krümmungsmittelpunkt nach der soeben angegebenen Konstruktion mit P zusammenfallen muß. Man erkennt daher, daß c der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte, d. h. die „Evolute" von e ist. Umgekehrt stellt e die Evolute von c dar.

§ 28. Sonderfall: gleiche Rollkreise.

Es seien in Fig. 26 M_1 und M_2 die Mittelpunkte der beiden gleichen Kreise k_1 und k_2, O ihr momentaner Berührpunkt, Q die Lage desselben, nachdem k_1 auf k_2 bis in die Stellung M_1' abgerollt ist. Dann ist O nach O' gekommen und es ist $OQ = O'Q$ und damit auch $\sphericalangle OM_2Q = \sphericalangle O'M_1'Q$. Ist P_1 der erzeugende Punkt, so hat er sich nach dem Abrollen in die Lage P_1' auf $M_1'O'$ begeben. Zieht man durch M_2 die Parallele zu $M_1'O'$ und durch P_1' die Parallele zu $M_1'M_2$, so schneiden sich beide im Punkte R und RP_1' trifft die Zentrale M_1M_2 im Punkte P_2. Man erkennt, daß $M_2RP_1'M_1'$

ein Parallelogramm, $M_2 P_2 P_1' M_1'$ ein gleichschenkliges Trapez ist, und daher ergibt sich

$$RP_1' = M_2 M_1' = M_1 M_2$$

und $$M_2 R = M_2 P_2 = M_1' P_1' = P_1 M_1 .$$

Wählt man daher P_2 auf $M_2 M_1$ so, daß $M_2 P_2 = M_1 P_1$ wird und zieht um M_2 durch P_2 den Kreis π, so findet man alle Punkte P_1' der Zykloide c als Endpunkte von Strahlen durch P_2, deren Anfangspunkt R auf π liegt und deren Länge RP_1' gleich dem Abstand $M_1 M_2$ ist. — $P_1' Q$ ist die Normale

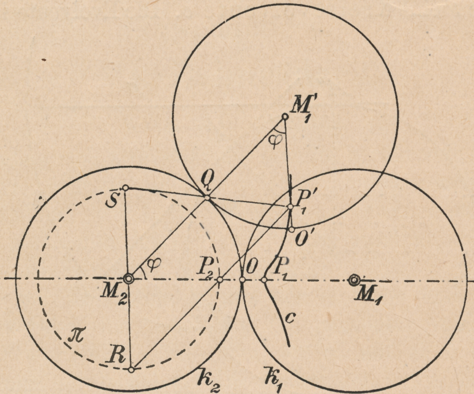


Fig. 26.

der Zykloide in P_1', da Q der Momentanpol für die betreffende Lage ist.

Verlängert man RM_2 über M_2 bis zum Schnittpunkt S mit der Normalen $P_1'Q$, so ist $M_2 Q = Q M_1'$, $M_2 R \parallel M_1' P_1'$ und daher gilt auch wegen der Kongruenz der Dreiecke $\Delta\, Q M_2 S$ und $\Delta\, Q M_1' P_1'$ die Beziehung

$$M_2 S = M_1' P_1' = R M_2 ,$$

d. h. S liegt auf dem Kreise π.

Man findet somit die Normale der Zykloide im Punkte P_1', wenn man den Schnittpunkt S von RM_2 und dem Kreise π mit dem Zykloidenpunkte P_1' verbindet.

P_2 heißt der Gegenpunkt, π der Gegenkreis zum erzeugenden Punkte P_1.

V. Die Evolventen.

§ 29. Allgemeines.

Läßt man eine Gerade g (Fig. 27) ohne Gleiten auf einem Kreise k (Grundkreis) abwälzen, so beschreibt jeder ihrer Punkte P eine Kreisevolvente e. Die Evolvente ist der-

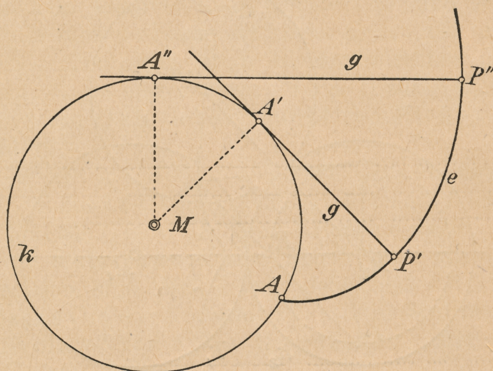


Fig. 27.

jenige Spezialfall der Zykloide, bei welchem der Radius des Rollkreises ∞ wird.

Der augenblickliche Berührpunkt A von Gerade und Kreis ist der Momentanpol der Bewegung zwischen Ebene der Geraden und Ebene des Kreises. Daher ist auch der Kreis die ruhende, die Gerade die bewegliche Polkurve.

Der Pol A' ist gleichzeitig der Krümmungsmittelpunkt der Evolvente für ihren Punkt P' und daher ist k die Evolute der Evolvente e.

§ 30. Konstruktion der Evolvente.

Da die abgewickelte Gerade $A'P'$ gleich dem Abwälzungsbogen $\widehat{A'A}$ ist, so erhält man einen Punkt P' der Evolvente, indem man die in A' an k gelegte Tangente $A'P = \widehat{A'A}$ macht. Diese Tangente an den Kreis ist die Normale der Evolvente im Punkte P', der mit ihr um A' geschlagene Kreis der Krümmungskreis.

Anwendungen.

VI. Zahnräder.[1])

§ 31. Allgemeines.

Drehen sich zwei einander ständig berührende Körper um zwei Achsen, die ihre relative Lage gegeneinander nicht ändern, so daß eine Bewegung des einen eine eindeutig bestimmte des andern Körpers erzwingt, so bilden sie eine allgemeine Verzahnung.

Es soll im folgenden nur der einfache und in der Technik bei weitem häufigste Fall paralleler Achsen behandelt werden, bei welchem wir es mit einer ebenen Bewegung zu tun haben. Die beiden sich um M_1 und M_2 (Fig. 28) drehenden Zahnräder mögen dann durch die Ebenen E_1 und E_2, das feste Gestell durch die zu den Achsen M_1 und M_2 senkrechte feste Ebene E_3 ersetzt werden.

Die beiden sich ständig berührenden Zahnprofile c_1 und c_2 berühren einander im „Eingriffspunkt“ A, der während der Bewegung der Räder seine relative Lage zur festen Ebene längs der sogenannten „Eingriffslinie“ e ändert.

---

[1]) Weiteres siehe Bach, Masch.-Elem.

Den Momentanpol P der beiden Räder findet man als Schnittpunkt der Verbindungslinie der beiden andern Pole M_1 und M_2 mit der in A auf c_1 bzw. c_2 errichteten Senkrechten (als Folge des Polsatzes § 20 und des in § 11 gezeigten Satzes von der Berührungsnormalen).

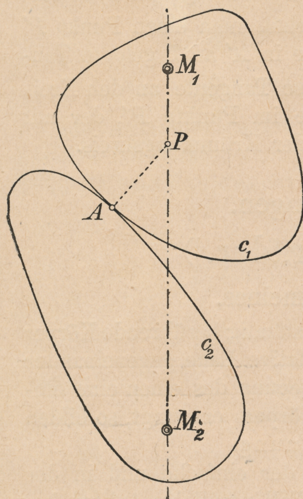


Fig. 28.

Der Momentanpol P kann sich während der Bewegung relativ zur festen Ebene nur auf der Polgeraden $M_1 M_2$ verschieben. Gegenüber den Zahnkörpern verändert er seine Lage kontinuierlich längs der beiden Polkurven p_1 und p_2, die sich in P berühren.

Wir können nun zwei verschiedene Anforderungen an die Verzahnung stellen:

1. Wir verlangen, daß eine gleichförmige Drehung des einen Zahnes eine bestimmte ungleichförmige des andern erzwingt. Diese Aufgabe muß häufig beim Entwurf von Steuerungen gelöst werden. Ihre Behandlung soll daher in den Kapiteln „Steuerungen" erfolgen.
2. Wir wünschen, daß einer gleichförmigen Drehung des einen Zahnkörpers eine ebensolche des andern entspricht. Diese Forderung konstanten Übersetzungsverhältnisses müssen fast alle „Zahnräder im eigentlichen Sinne" erfüllen. Sie soll daher in diesem über Zahnräder handelnden Kapitel stets vorausgesetzt werden.

§ 32. Allgemeine Verzahnung.

Es sei in Fig. 29 der Momentanpol der Zahnradebenen E_1 und E_2 mit P, seine Abstände von M_1 und M_2 mit R_1 und R_2, die Winkelgeschwindigkeiten der Räder mit ω_1 bzw. ω_2, ihr Verhältnis, das sogenannte Übersetzungsverhältnis, mit $\omega_1 : \omega_2 = \varepsilon$ bezeichnet.

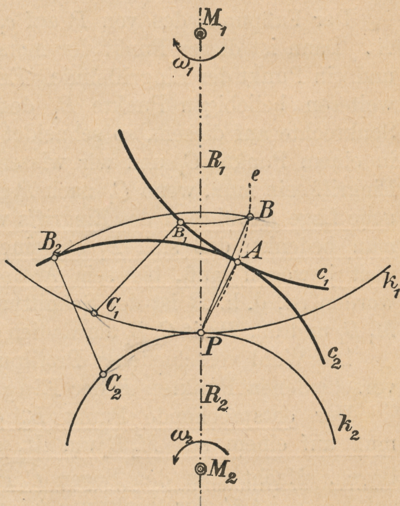


Fig. 29.

Da die Relativgeschwindigkeiten des Poles P als Punkt der Räder gegenüber der festen Ebene gleich, also

$$R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2$$

sein müssen, so erhält man

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \varepsilon = \text{konst.},$$

d. h. der Pol der beiden Räder behält seine Lage gegenüber E_3 stets bei. Relativ zu den sich um M_1 bzw. M_2 drehenden Radebenen muß er sich also auf den Kreisen k_1 und k_2 bewegen. Diese sind also die Polkurven der beiden Radebenen und heißen Teilkreise.

Da die Berührungsnormale der beiden Zahnkurven stets durch den Pol gehen muß, so gilt für eine Verzahnung mit konstantem Übersetzungsverhältnis das wichtige „Verzahnungsgesetz“:

Die Normale im jeweiligen Berührpunkte beider Zahnflanken geht stets durch den Berührpunkt der beiden Teilkreise.

Aufgabe: Es sei das Zahnprofil c_1 des treibenden Rades I bekannt, es möge die Eingriffslinie e und das Gegenprofil c_2 des getriebenen Rades ermittelt werden.

Der Fußpunkt des von P auf c_1 gefällten Lotes sei A. Dann ist dieser Punkt der momentane Berührpunkt und ein Punkt der Eingriffslinie. Errichten wir in einem weiteren beliebigen Punkte B_1 des Zahnprofils c_1 die Senkrechte auf diesem, so schneidet sie den Teilkreis k_1 in einem Punkte C_1 und wir wissen, daß Punkt B_1 im Eingriff sein muß, wenn C_1 nach P gekommen ist. Seine neue Lage B während des Eingriffs wird gefunden, wenn man bedenkt, daß sich B_1 auf einem Kreise um M_1 so weit bewegen muß, bis sein Abstand $BP = B_1 C_1$ geworden ist, d. h. B ist der Schnittpunkt der um M_1 mit $M_1 B_1$ und um P mit $C_1 B_1$ als Radien geschlagenen Kreise.

Die Wahl verschiedener Profilpunkte B_1 führt so zu verschiedenen Punkten B der Eingriffslinie e.

Der entsprechende Punkt B_2 des Gegenprofils c_2 muß auf einem mit $M_2 B$ um M_2 geschlagenen Kreise liegen. Macht man den Bogen $\widehat{C_2 P}$ auf k_2 gleich $\widehat{C_1 P}$ auf k_1, so ist C_2 der Punkt von k_2, welcher zur gleichen Zeit mit C_1 in den Pol P fällt. Die auf c_2 im gesuchten Punkte B_2 errichtete Normale muß durch C_2 gehen und es muß $B_2 C_2 = B_1 C_1$ sein. Also liegt B_2 auf dem um C_2 mit $B_1 C_1$ geschlagenen Kreise und wird als dessen Schnittpunkt mit dem obenerwähnten um M_2 geschlagenen Kreise gefunden.

Dieses Verfahren wurde zuerst von Reuleaux angewendet.

Ein anderes Verfahren, zu einem gegebenen Zahnprofil das andere zu finden, ohne jedoch die Eingriffslinie bestimmen zu müssen, rührt von Poncelet her.

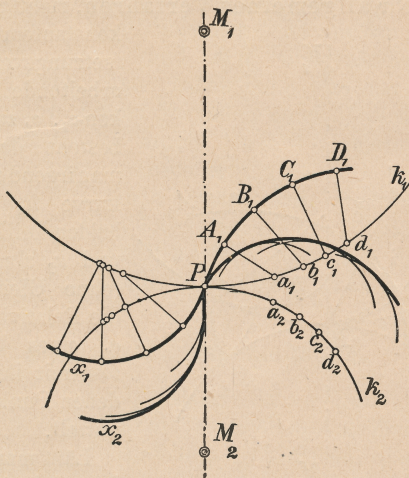


Fig. 30.

Sind nämlich (Fig. 30) k_1 und k_2 die Teilkreise, A_1, B_1, C_1 usw. beliebige Punkte des Profils x_1 und zieht man in diesen die Normalen auf x_1 $A_1 a_1$, $B_1 b_1$, $C_1 c_1$ usw. bis zu ihren Schnittpunkten a_1, b_1, c_1 mit Teilkreis k_1, macht man ferner auf k_2 die Bögen $\widehat{Pa_2} = \widehat{Pa_1}$, $\widehat{Pb_2} = \widehat{Pb_1}$, $\widehat{Pc_2} = \widehat{Pc_1}$, ... und schlägt um die neuen Teilpunkte a_2, b_2, c_2 Kreisbögen mit den entsprechenden Radien $A_1 a_1$, $B_1 b_1$, $C_1 c_1$ usw., so ergibt die Einhüllende aller dieser Kreisbögen das gesuchte Gegenprofil x_2.

Wie man erkennt, läßt sich als eine Zahnflanke jede beliebig gestaltete Kurve verwenden, vorausgesetzt, daß alle ihre Normalen den Teilkreis schneiden.

Ein sehr allgemeines Verfahren, richtig (d. h. mit konstantem Übersetzungsverhältnis) arbeitende Zahnflanken c_1, c_2 zu erhalten besteht darin, daß man irgend eine Hilfskurve h_0 sich auf beiden Teilkreisen k_1 und k_2 abrollen läßt (ohne Gleiten) und die Relativbahnen c_1, c_2 eines beliebigen fest mit ihr verbundenen Punktes A ermittelt.

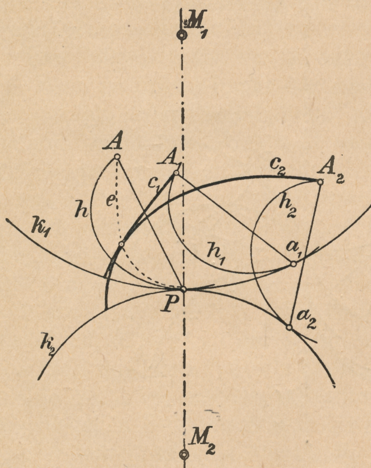


Fig. 31.

Läßt man nämlich h_0 auf k_1 bis in die Lage h_1 rollen, so kommt der erzeugende Punkt A_0 nach A_1 und h_1 berührt k_1 in a_1; da a_1 der Momentanpol dieser Rollbewegung ist, so muß die augenblickliche Normale der von A_1 erzeugten Zahnkurve c_1 durch a_1 gehen.

Rollt man h_0 auf k_2 bis zur Lage h_2, wobei a_2 der neue Berührpunkt und A_2 die Stellung des erzeugenden Punktes A_0 ist, so geht aus dem gleichen Grunde die augenblickliche Normale der von A_2 erzeugten Zahnkurve c_2 durch a_2.

Ist der Bogen $\widehat{Pa_1} = \widehat{Pa_2}$ und dreht man beide Räder so weit, bis die Punkte a_1 und a_2 ihrer Teilkreise in P zusammenfallen, so erkennt man, daß in dieser gedrehten Lage auch h_1 und h_2 in h und A_1 mit A_2 im Punkte A der Eingriffslinie zur Deckung kommen und die Normalen $A_1 a_1$ und $A_2 a_2$ übereinander fallen. Die beiden Zahnflanken haben dann also den Punkt A gemeinsam, ihre beiden Normalen fallen in eine AP zusammen, gehen also durch den Pol P und das Verzahnungsgesetz ist demnach erfüllt.

Die Eingriffslinie erhält man, wenn man die Hilfskurve h_0 in allen Lagen zeichnet, in denen sie die Teilkreise im Punkte P berührt, und dann die Lagen des erzeugenden Punktes A dabei ermittelt.

§ 33. Zykloidenverzahnung.

Wählt man (Fig. 32) als Hilfskurve h_0 einen Kreis, den sogenannten Rollkreis, so erhält man als Zahnflanken die in Kap. IV behandelten Zykloiden, die in der Technik als Zahnkurven eine große Rolle spielen. Als erzeugenden Punkt benutzt man hierbei wohl stets einen auf der Peripherie des Rollkreises liegenden Punkt, so daß man es mit gemeinen Epi- oder Hypozykloiden zu tun hat.

Jedes Zahnprofil wird aus zwei Teilen, dem „Kopf" und dem „Fuß" zusammengesetzt und zwar benutzt man zur Erzeugung des Kopfes des treibenden und Fußes des getriebenen Rades einen Rollkreis h_2 (Radius ϱ_2), zur Erzeugung des Kopfes des getriebenen und Fußes des treibenden Rades einen andern Rollkreis h_1 (Radius ϱ_1).

Ist t die „Teilung" des Zahnrades, d. h. der von „Zahn" und „Zahnlücke" auf dem Teilkreis

begrenzte Bogen, so macht man gewöhnlich die Kopfhöhe 0,3 t, die Fußhöhe 0,4 t.

Aus dem in § 32 (S. 69) Gesagten ergibt sich, daß die Eingriffslinie der Zykloidenverzahnung

a) mit dem Rollkreis zusammenfällt, wenn der erzeugende Punkt auf diesem liegt,

b) ein zum Rollkreis konzentrischer Kreis sein muß, wenn der erzeugende Punkt außerhalb oder innerhalb des Rollkreises liegt.

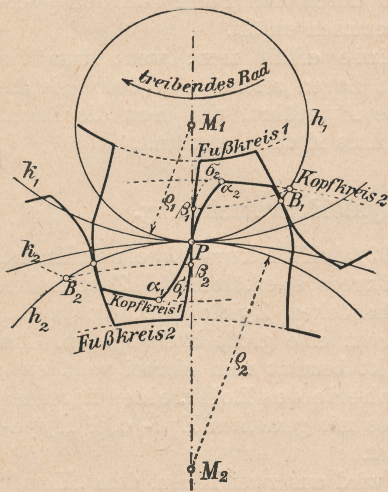


Fig. 32.

Da wir gewöhnlich zwei Rollkreise benutzen und somit die Flanken eigentlich aus zwei verschiedenen Zahnkurven bestehen, so setzt sich auch die Eingriffslinie $B_1 B_2$ aus den beiden Rollkreisbögen $B_1 P$ und PB_2 zusammen, die zwischen den Kopfkreisen der Räder abgeschnitten werden.

Während die Kopfprofile $\alpha_1 P$ bzw. $\alpha_2 P$ in ihrer ganzen Ausdehnung zwischen Kopf- und Teilkreisen arbeiten, wird von den Fußprofilen nur das kurze Stück $\beta_1 P$ bzw. $\beta_2 P$ zur eigentlichen Zahnkurve herangezogen. Das übrig bleibende bis zum Fußkreis reichende Stück des Fußes kann daher auch durch jede andere Kurve erzetzt werden, wenn sie nur außerhalb der Relativbahnen $\sigma_1 \sigma_2$ der Kopfkanten α_1 und α_2 liegt.

§ 34. Evolventenverzahnung.

Legt man (Fig. 33) durch den Berührpunkt P der beiden Teilkreise k_1 und k_2 zweier Räder unter einem beliebigen Winkel φ zur Zentrale $M_1 M_2$ eine Gerade und zeichnet um M_1 und M_2 die beiden sogenannten „Grundkreise“ h_1

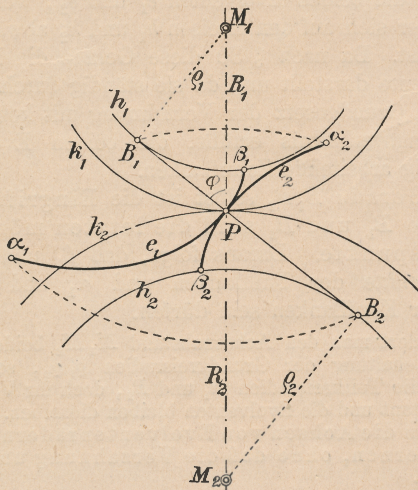


Fig. 33.

und h_2, welche die Gerade in den Punkten B_1 und B_2 berühren, so erkennt man, daß ihre Radien ϱ_1 und ϱ_2 in der Beziehung stehen

$$\varrho_2 : \varrho_1 = R_2 : R_1 = \omega_1 : \omega_2 = \varepsilon,$$

$$\varrho_1 \omega_1 = \varrho_2 \omega_2 ,$$

d. h. die beiden Grundkreise haben gleiche Umfangsgeschwindigkeit. Man kann daher vom Kreise h_2

einen Faden $B_1 B_2$ abwickeln und gleichzeitig auf h_1 aufwickeln, während sich die Räder drehen, ohne daß er zerreißen oder schlaff werden würde. Der Punkt P des Fadens bewegt sich dann mit konstanter Geschwindigkeit, die gleich der Umfangsgeschwindigkeit der Kreise h_1 oder h_2 ist, auf $B_1 B_2$ und beschreibt den beiden Rädern gegenüber die beiden Evolventen e_1 und e_2, weil er ein Punkt einer sich auf den Kreisen h_1 und h_2 abwälzenden Geraden ist. Da nach § 30 diese Gerade die Normale der Evolvente darstellt und da sie ständig durch P geht, so ist das Grundgesetz der Verzahnung mit konstantem Übersetzungsverhältnis erfüllt, die beiden Evolventen sind richtig arbeitende Zahnflanken.

Die Gerade $B_1 B_2$ selbst ist die Eingriffslinie; die Punkte B_1 und B_2 sind die letzten möglichen Eingriffspunkte. Daraus folgt, daß β_1 und β_2 die letzten Punkte der Fußflanken und α_1 und α_2 die letzten der Kopfflanken sein dürfen.

Verändert man den Achsenabstand $M_1 M_2$ beider Räder unter Beibehaltung der Grundkreisradien $\varrho_1 \varrho_2$, so ändern sich zwar die Teilkreisradien R_1 und R_2, doch ihr Verhältnis bleibt konstant und die Evolventen bleiben dieselben. Daher kann mann die Achsen von Evolventenrädern nähern oder entfernen, ohne daß die Verzahnung unrichtig arbeitete.

§ 35. Grissongetriebe.[1]

Bei diesem Getriebe (Fig. 34) besitzt das große Rad an Stelle der sonst üblichen Zähne eine Anzahl sogenannter „Triebstöcke", das sind kreisrunde Bolzen (Radius r), deren Mittelpunkte in gleichen Abständen auf einem mit dem Teilkreis k_2 konzentrischen Kreise $\varkappa$ liegen und die den

[1]) Siehe Grisson, Über Grissongetriebe, Z. 1903 und Bach, Masch.-Elemente.

Teilkreis k_2 von innen berühren. Das kleine Rad ist mit zwei Zähnen ausgerüstet, die um 180° versetzt sind und in zwei parallelen Ebenen liegen. Das Profil dieser Zähne ist die im Abstand r gezeichnete Äquidistante zu derjenigen Zykloide, welche vom Mittelpunkt B_0 eines Bolzens beim Abrollen der Teilkreise aufeinander gegen das kleine Rad beschrieben wird.

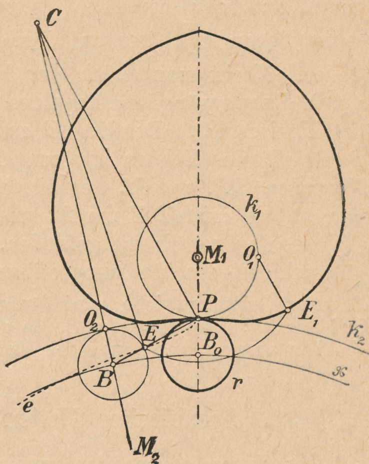


Fig. 34.

Die Eingriffslinie e wird in folgender Weise gefunden. Beim Arbeiten der Räder wandert der Mittelpunkt des Bolzens auf dem Kreise $\varkappa$ z. B. in die Lage B. Nach dem Verzahnungsgesetz muß die Normale im Eingriffspunkt durch den Pol P gehen, also ist BP die augenblickliche Normale und der auf ihr liegende Eingriffspunkt E muß als Punkt des Bolzens von B um $BE = r$ entfernt sein. Durch mehrmalige Wiederholung dieser Konstruktion erhält man beliebig viele Punkte der Eingriffslinie.

Die Eingriffslinie e kann man sich auch als die Bahn des Punktes E einer Geraden BP erzeugt denken, die beständig durch P hindurchgleitet, während sich ihr Punkt B auf dem Kreise $\varkappa$ bewegt. Hieraus ergibt sich das Momentanzentrum dieser bewegten Geraden als

Schnitt C der in P auf BP errichteten Normalen mit dem durch B gezogenen Radius $M_2 B$. Die Verbindungslinie CE ist mithin die Normale der Eingriffslinie e im Punkte E.

Das Zahnprofil des kleinen Rades erhält man wie folgt: Zieht man $M_2 B$ bis zum Schnitt O_2 mit k_2, so ist Bogen $\widehat{O_2 P}$ der auf dem Teilkreis k_2 abgerollte Bogen. Macht man auf k_1 den Bogen $\widehat{O_1 P} = \widehat{O_2 P}$, so ist O_1 die ursprüngliche Lage des in P liegenden Punktes des Kreises k_1. Der in E zum Eingriff kommende Punkt E_1 des Zahnes hat von O_1 die Entfernung der Normalen EP, von M_1 den Abstand EM_1, wird also als Schnitt der mit $M_1 E$ um M_1 und mit $O_1 E_1 = PE$ um O_1 geschlagenen Kreise gefunden. Durch Wiederholung läßt sich das gesuchte Zahnprofil punktweise konstruieren.

Das Grissongetriebe wird für große Übersetzungen von 5 : 1 bis 50 : 1 gebaut. An Stelle der festen Bolzen werden Rollen angeordnet, um die Reibung zu vermindern.

§ 36. Spezifisches Gleiten der Zahnräder.[1])

Das Zusammenarbeiten zweier Zahnflanken besteht zum Teil aus einem Abrollen, zum Teil aus einem Gleiten derselben. Würde nur reines Rollen stattfinden, so könnte eine Abnützung der Räder lediglich durch ein Zerquetschen des Materials eintreten, das aber ganz vermieden werden kann, wenn die durch den Zahndruck hervorgebrachten kleinen Deformationen der Flanken innerhalb der Elastizitätsgrenze bleiben.

Das Gleiten dagegen ruft auch schon bei geringeren Drücken eine Abnutzung hervor. Bezeichnet man die in

---

[1]) Siehe Büchner, Abnutzung der Zahnräder, Z. 1902.

der unendlich kurzen Zeit dt vom Eingriffspunkt auf den Flanken durchlaufenen Strecken mit ds_1 bzw. ds_2, so würde, falls $ds_1 = ds_2$ wäre, reines Rollen stattfinden. Das Gleiten wächst mit der Zunahme des Unterschiedes $ds_1 - ds_2$ und macht sich für die Abnutzung um so mehr bemerkbar, je kleiner die Strecken ds_1 bzw. ds_2 sind, auf die es sich verteilt. Daher ist das sogenannte „spezifische Gleiten“

$$\gamma_1 = \frac{ds_1 - ds_2}{ds_1},$$

$$\gamma_2 = \frac{ds_1 - ds_2}{ds_2}$$

ein Maßstab für die Abnutzung. Durch Division mit der unendlich kleinen Zeit dt erhält man unter Berücksichtigung, daß

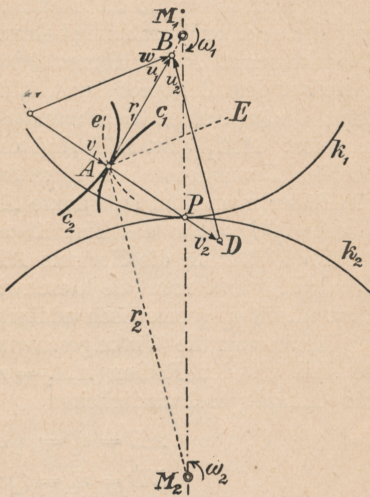


Fig. 35.

$$\frac{ds_1}{dt} = v_1, \qquad \frac{ds_2}{dt} = v_2$$

die Geschwindigkeiten darstellen, mit denen der Eingriffspunkt sich längs der Flanken bewegt, die Werte

$$\gamma_1 = \frac{v_1 - v_2}{v_1},$$

$$\gamma_2 = \frac{v_1 - v_2}{v_2}.$$

Um das spezifische Gleiten in einem Punkte der Zahnflanken zu bestimmen, ist es daher nötig, die obenerwähnten Geschwindigkeiten v_1, v_2 zu ermitteln.

Es seien in Fig. 35 die Zahnflanken c_1, c_2 und die Eingriffslinie e einer Verzahnung bekannt. Ist A der momentane Eingriffspunkt, P der Momentanpol, so ist AP die Normale auf dem Zahnprofil und fällt daher mit der Richtung der gedrehten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 zusammen. AM_1 bzw. AM_2 sind die Richtungen der gedrehten Umfangsgeschwindigkeiten u_1 und u_2, welche die Räder momentan im Punkte A haben. Die gedrehte Geschwindigkeit w des Eingriffspunktes längs der Eingriffslinie fällt in die Normale AE derselben und wird erhalten, wenn man die Geschwindigkeiten u_1 mit v_1 bzw. u_2 mit v_2 geometrisch addiert.

Kennt man die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 bzw. ω_2, so sind aus den Radien $AM_1 = r_1$ und $AM_2 = r_2$ auch die Umfangsgeschwindigkeiten

$$AB = u_1 = r_1 \omega_1 ,$$

$$DB = u_2 = r_2 \omega_2$$

bekannt. Zieht man $BC \parallel AE$ und $BD \parallel AM_2$ bis zu ihren Schnittpunkten C bzw. D mit AP, so hat man die gesuchten Geschwindigkeiten

$$CA = v_1 , \qquad CD = v_2 ;$$

denn

$CB = w$ resultiert aus $CA = v_1$ und

$AB = u_1$

oder aus

$CD = v_2$ und

$DB = u_2$.

Also wird das spezifische Gleiten dargestellt durch den Quotienten

$$\gamma_1 = \frac{v_1 - v_2}{v_1} = \frac{AD}{CA},$$

$$\gamma_2 = \frac{v_1 - v_2}{v_2} = \frac{AD}{CD}.$$

Der Bequemlichkeit halber nimmt man stets $\omega_1 = 1$ an, weil dann

$$AB = u_1 = r_1 \omega_1 = AM_1$$

wird, also B mit M_1 zusammenfällt.

§ 37. Normaldruck.

Außer vom spezifischen Gleiten γ ist die Abnutzung Δ in einem Punkte der Flanke abhängig vom Normaldruck N, dem Reibungskoeffizienten μ, der Zahnbreite b, der Tourenzahl n, der Eingriffsdauer τ [= Verhältnis des Eingriffsbogens[1]) zur Teilung], der Betriebsdauer ϑ und einer Materialkonstanten c (von der Härte, der Oberflächenbeschaffenheit usw. abhängig), so daß

$$\Delta = c\mu \cdot \frac{\gamma}{b\tau} \cdot Nn\vartheta.$$

Der Normaldruck N der Flanken (Fig. 36) ergibt sich aus der Forderung, daß er mit der durch ihn erzeugten Radreibung μN eine resultierende Kraft N' ergeben muß, die auf das getriebene Rad *2* ein konstantes Drehmoment M_d ausübt.

---

[1]) Der Eingriffsbogen ist der vom Beginn bis zum Ende des Eingriffs eines Zahnes auf dem Teilkreis durchlaufene Bogen.

Da N in die Richtung der Flankennormalen AP fällt und μN dazu senkrecht und mit N ständig in der Beziehung steht

$$\mu N = \tan\varrho \cdot N,$$

wobei ϱ der Reibungswinkel ist, so ist die Richtungs-

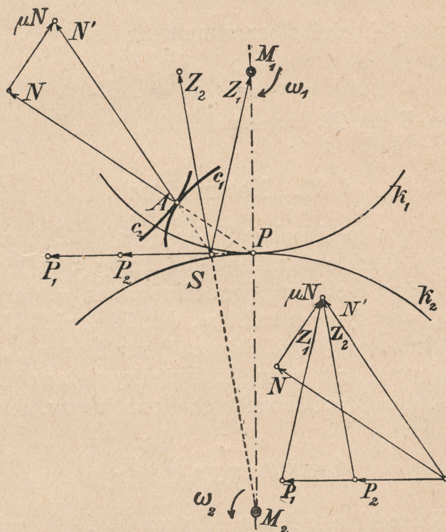


Fig. 36.

linie der Kraft N' stets um diesen Winkel ϱ gegen N geneigt, also der Lage nach und daher auch ihr Hebelarm a, unter dem sie am Rade *2* angreift, der Größe nach bekannt. Da nun

$$a \cdot N' = M_d,$$

so ist auch

$$N' = \frac{M_d}{a}$$

berechenbar.

Will man die Rechnung umgehen und graphisch arbeiten, so hat man N' aus einer am Teilkreisumfang des zweiten Rades wirkenden konstanten Kraft P_2, die aus $P_2 = \frac{M_d}{R_2}$ bekannt ist, und einer durch die Achse M_2 gehenden Kraft Z_2, die also kein Drehmoment auf Rad *2* ausübt, zusammenzusetzen.

§ 38. Reibungsarbeit.

Zerlegt man N' in eine am Umfang des treibenden Rades *1* angreifende Kraft P_1 und eine durch M_1 gehende Kraft Z_1, so ergibt $P_1 - P_2$ diejenige Kraft, die am Teilkreisumfang von Rad *1* aufzuwenden ist, um die Reibung zu überwinden.

Ist ds das Bogenelement des Teilkreises für die Zeit dt, so ist

$$dA = (P_1 - P_2) \cdot ds$$

die in der Zeit dt aufzuwendende Reibungsarbeit; die gesamte Reibungsarbeit wird also

$$A = \int (P_1 - P_2)\, ds\,,$$

wenn über dem gesamten Eingriff eines Zahnes integriert wird. Trägt man $P_1 - P_2$ als Ordinate über dem abgewickelten Teilkreise auf, so ist die entstehende Fläche ein Maß der Reibungsarbeit.

§ 39. Beispiel.

Ein Beispiel einer Untersuchung von spezifischem Gleiten, Normaldruck und Reibungsarbeit ist in

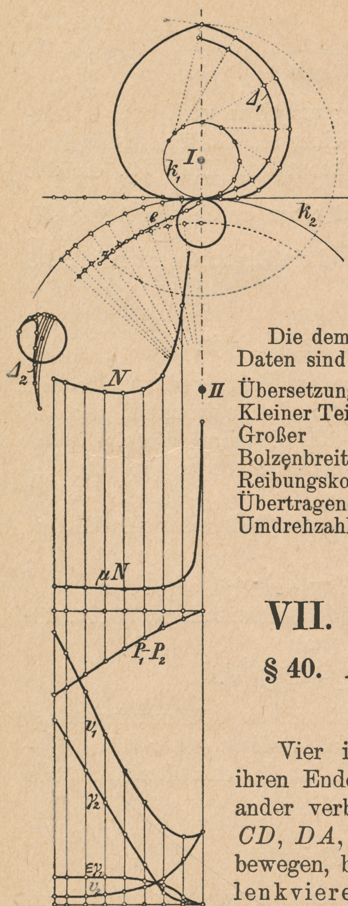


Fig. 37.

Fig. 37 an einem Grissongetriebe mit festen Bolzen ohne Rollen durchgeführt.

Naturgemäß sind die dabei erhaltenen Resultate nicht gültig für ein mit Rollen armiertes Getriebe, dessen Abnutzung und Reibungsverlust weit geringer ausfällt. Nach Versuchen von Roser haben solche Getriebe Wirkungsgrade bis 90 % ergeben.

Die dem Beispiel zugrunde gelegenen Daten sind die folgenden:

Übersetzungsverhältnis	ε	$= 5$
Kleiner Teilkreishalbm.	R_1	$= 22$ mm
Großer „	R_2	$= 110$ „
Bolzenbreite	b	$= 45$ „
Reibungskoeffizient . .	μ	$= 0{,}1$
Übertragene Leistung	N	$= 2{,}75$ PS
Umdrehzahlen	n_1	$= 400$ 1/min
	n_2	$= 80$ „

VII. Gelenkviereck.

§ 40. Allgemeines und Bezeichnungen.

Vier im Viereck liegende, an ihren Enden durch Gelenke miteinander verbundene Stäbe *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, die sich in einer Ebene bewegen, bilden ein sogenanntes Gelenkviereck oder eine Vierzylinderkette (Fig. 38).

Jeder Stab kann als Repräsentant einer Ebene aufgefaßt werden. Hält man einen von den Stäben, z. B. AD fest, so heißt er das Gestell; die beiden an ihn angrenzenden AB und CD werden als Kurbeln oder

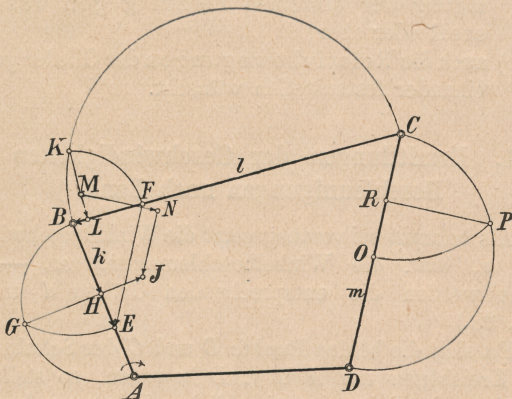


Fig. 38.

Schwingen bezeichnet, und den letzten die beiden Kurbeln zusammenkuppelnden Stab BC nennt man die Kuppelstange oder Koppel.

Die einzelnen Stablängen seien $AB = k$, $BC = l$, $CD = m$, die Diagonale $AC = n$ (Fig. 40). Die Winkelgeschwindigkeit, mit der ein Stab sich gegen seinen Nachbarstab um den gemeinsamen Gelenkpunkt dreht, möge mit demselben kleinen lateinischen, die entsprechende Winkelbeschleunigung mit demselben kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden wie der Gelenkpunkt, so daß a, b, c, d die Winkelgeschwindigkeiten und α, β, γ, δ die Winkelbeschleunigungen um die Punkte A, B, C, D bedeuten.

Zur Ermittelung der Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsverhältnisse kann man zwei verschiedene Wege einschlagen, je nachdem man entweder

a) lediglich die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung der einzelnen Ebenen gegen das Gestell oder aber

b) auch die Relativbewegungen der Glieder gegeneinander festzustellen wünscht.

§ 41. Ermittlungen der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nach Land.[1])

Als bekannt sei vorausgesetzt die Winkelgeschwindigkeit a, bzw. die Winkelbeschleunigung α. — Gesucht werden die entsprechenden Größen d und δ. (Fig. 38.)

Da sich die beiden Punkte B und C der Schubstange auf Kreisbögen um A bzw. D bewegen, so stellt der Schnittpunkt P der augenblicklichen Bahnnormalen, d. h. der Kurbeln BA und CD, den Geschwindigkeitspol der Stange BC dar. Die Stange macht also eine Momentandrehung mit der vorläufig unbekannten Winkelgeschwindigkeit ω bzw. Winkelbeschleunigung ε um P. Man kann nach bekannten Grundsätzen der Mechanik diese Drehung ersetzen durch eine Schiebung der Stange BC mit der Geschwindigkeit v_B bzw. Beschleunigung p_B des Punktes B (Ersatzschiebung), verbunden mit einer gleichzeitigen Drehung um diesen Punkt mit der Winkelgeschwindigkeit ω bzw. der Winkelbeschleunigung ε (Ersatzdrehung).

---

[1]) R. Land, Geschw.- und Beschl.-Plan für Mechanismen usw., Z. 1896.

Geschwindigkeiten:

Mit a ist auch die Geschwindigkeit $BE = v_B = k\,a$ des Kurbelzapfens B, also des Punktes B der Schubstange BC bekannt. Im Geschwindigkeitsdreieck BEF ergibt sich die Geschwindigkeit $FE = v_c = m\,d$ als Resultierende, wenn man die bekannte Geschwindigkeit $BE = v_B$ der Ersatzschiebung mit der Geschwindigkeit $FB = l\,\omega$ zusammensetzt, die der Punkt C infolge der Ersatzdrehung um B besitzt und die in die Richtung CB fällt. Die Richtung von $FE = v_c$ ist die des Polstrahls CD. Zieht man daher $EF \parallel CD$ bis zum Schnitt F mit BC, so ist tatsächlich

$$FB \hat{+} BE = FE\,,$$

d. h. es ist $FE = v_c = m\,d$.

Beschleunigungen:

Mit a und α kennt man auch die Beschleunigung $BJ = p_B$ des Punktes B, die sich aus den beiden Komponenten

$$BH = k\,a^2 = \text{Normalbeschleunigung},$$

$$HJ = k\,\alpha \ = \text{Tangentialbeschleunigung}$$

zusammensetzt.

Die Beschleunigung $MJ = p_c$ des Punktes C findet man als Resultierende aus der bekannten Beschleunigung $BJ = p_B$ der Ersatzschiebung und der Beschleunigung $MB = \sqrt{(ML)^2 + (LB)^2}$ der Ersatzdrehung um B, wobei

$$LB = l\,\omega^2 \text{ die Normalbeschleunigung},$$

$$ML = l\,\varepsilon \text{ die Tangentialbeschleunigung}$$

dieser Drehbewegung bedeuten.

Die Beschleunigung $MJ = p_c$ muß sich andererseits aus den beiden Komponenten

$$NJ = m\, d^2 = \text{Normalbeschleunigung},$$
$$MN = m\, \delta \;= \text{Tangentialbeschleunigung}$$

der Drehung des Punktes C um D zusammensetzen lassen.

Zum Punkte M kann man also längs zweier verschiedener Beschleunigungszüge gelangen

a) längs des Linienzuges $JHBLM$,
b) „ „ „ JNM.

Nach L kommt man, wenn man $LB = l\,\omega^2$ aus $CB = l$ und aus $FB = l\,\omega$ in der in § 65 angedeuteten Weise konstruiert. Von $LM = l\,\varepsilon$ ist nur die Richtung $\perp$ BC bekannt.

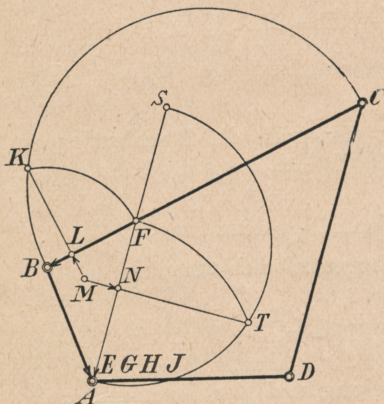


Fig. 39.

Von J gelangt man nach N, wenn man $NJ = CR = m\,d^2$ in gleicher Weise aus $CD = m$ und aus $CO = FE = m\,d$ ermittelt. Von $NM = m\,\delta$ ist wieder nur die Richtung $\perp$ CD bekannt; daher wird M als Schnitt von NM mit ML gefunden und die Beschleunigung p_c ist somit als MJ bekannt.

Besonderer Fall:

$$a = \text{const}; \; \alpha = 0.$$

Rotiert die Kurbel BA (Fig. 39) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit a, so empfiehlt es sich, den Geschwindigkeitsmaßstab $1:a$ zu wählen, da dann die Punkte A, E, G, H, J sämtlich mit A zusammenfallen.

Man kann dann die Ermittlung von $JN = m d^2$ gleich mit an den Punkt A verlegen, indem man AF über F bis S verlängert, so daß $AS = DC = m$, dann über AS den Halbkreis und um A mit AF den Kreis schlägt, der den ersteren in T schneidet, und von T das Lot $TN \perp AT$ bis zum Schnitt M mit KL zieht.

Will man auch über die Relativbewegungen der einzelnen Glieder des Gelenkvierecks gegeneinander Aufschluß haben, so ist die in § 41 genannte Methode nicht anwendbar. Man muß dann vielmehr den folgenden Weg einschlagen.

§ 42. Ermittlung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen unter Benutzung der Relativbewegungen.

Geschwindigkeiten:

Der Punkt C (Fig. 40) deckt sich momentan mit einem Punkte C_k, der der Ebene k angehört und die Geschwindigkeit $CG = na$ (Bezeichnungen siehe § 40) gegen das Gestell besitzt. Setzt man diese mit der Geschwindigkeit $l \cdot b$ zusammen, die C gegen die Ebene k hat und die in die Richtung CB fällt, so erhält man in der Resultierenden beider die gesuchte Geschwindigkeit von C gegen das Gestell, deren Richtung mit CD zusammenfällt. Daher schneidet die durch G zu CD gezogene Parallele auf BC den Punkt H so an, daß

$$HC = l \cdot b,$$

$$HG = m \cdot d$$

und $$HC \hat{+} CG = HG \quad \text{ist.}$$

Beschleunigungen:

Als bekannt sei vorausgesetzt die Winkelgeschwindigkeit a und Winkelbeschleunigung α. Es möge die Beschleunigung p_c des Punktes C gegen das Gestell aufgesucht werden. C ist ein Punkt der Schwinge m und

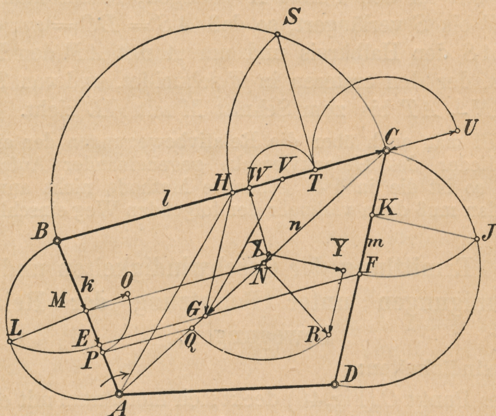


Fig. 40.

seine Beschleunigung setzt sich daher zusammen aus

Aa) der Normalbeschleunigung $m d^2$,
Bb) der Tangentialbeschleunigung $m \delta$.

Erstere Aa) läßt sich in der auf S. 147 geschilderten Weise aus den bekannten Strecken $CD = m$ und $CF = m d$ finden, indem man über CD den Halbkreis, um C mit CF den Kreisbogen bis J schlägt und von J das Lot JK auf CD fällt, so daß $CK = m d^2$ wird.

Letztere Bb) steht senkrecht auf der vorigen, ist aber der Größe nach vorläufig noch nicht zu ermitteln.

Betrachten wir die Ebenen k, l und das Gestell, so können wir nach § 23 die Beschleunigung p_c auch finden, wenn wir sie als Resultante der folgenden drei Beschleunigungen ermitteln:

1. Absolutbeschleunigung von C als Punkt C_k der Ebene k gegen das Gestell, bestehend aus den beiden zueinander rechtwinkligen Komponenten:
   a) Normalbeschleunigung $n\,a^2$,
   b) Tangentialbeschleunigung $n\,\alpha$;
2. Relativbeschleunigung von C als Punkt der Ebene l gegen Ebene k, bestehend aus den beiden rechtwinkligen Komponenten:
   a) Normalbeschleunigung $l\,b^2$,
   b) Tangentialbeschleunigung $l\,\beta$;
3. Coriolis-Beschleunigung $2\,l\,b \cdot a$.

Von diesen Beschleunigungskomponenten lassen sich alle außer 2b) wie folgt konstruieren:

1a) Aus $BE = k\,a$ und $AB = k$ findet man nach S. 147 $BM = k \cdot a^2$, wenn man um B mit BE den Kreisbogen bis zum Schnitt L mit dem über AB geschlagenen Halbkreis schlägt und von L das Lot LM auf AB fällt. Zieht man noch $MN \parallel BC$ bis zum Schnitt N mit AC, so ist $CN = n\,a^2$.

b) Die bekannte Tangentialbeschleunigung $MO = k\,\alpha$ wird um M in die Lage MP geklappt, durch P die Parallele zu BC bis zum Schnitt Q mit AC gezogen und NQ um N um 90° bis in die Lage NR herumgeklappt. Dann ist $NR = n\,\alpha$.

2a) Aus $CH = l\,b$ und $BC = l$ findet man nach S. 147 $CT = l\,b^2$, wenn man um C mit CH den Kreisbogen bis zum Schnitt S mit dem Halbkreis über BC zieht und das Lot ST auf BC fällt. Da $CT = l\,b^2$ von C

nach dem Drehpunkt B gerichtet ist, so muß es als $UC = CT = lb^2$ an die Beschleunigungen CN und NR angesetzt werden, um im Beschleunigungsplan im richtigen Sinne zu erscheinen.

3. Die Coriolis-Beschleunigung steht senkrecht zu der nicht gedrehten Relativgeschwindigkeit lb und zwar in dem Richtungssinn, in welchem lb zeigen müßte, wenn man es im Sinne der Winkelgeschwindigkeit a um 90° dreht. Sie fällt daher in die Stabrichtung BC, von B nach C zeigend. Ihre Größe $2\,l\,b\,a$ findet man, wenn man $CH = lb$ im Verhältnis $\frac{na}{n} = \frac{CG}{CA}$ verkleinert und die dabei erhaltene Strecke verdoppelt. Verbindet man A mit H und zieht durch G dazu die Parallele GV bis zum Schnitt V mit BC, so ist

$$CV = CH \cdot \frac{CG}{CA} = l\,b\,a\,.$$

Schlägt man um V mit VT den Kreisbogen bis zum Schnitt W mit BC, so ist

$$WU = 2(VT + TC) = 2\,l\,b\,a$$

nach Größe, Lage und Richtungssinn.

2 b) Die in W auf BC errichtete Senkrechte fällt mit der Richtung der noch unbekannten Tangentialbeschleunigung $l\beta$ zusammen. Wäre ihr Anfangspunkt X bekannt, so wäre die Resultierende XR des Beschleunigungszuges $XWUCNR$ die gesuchte Beschleunigung p_c. Diese muß sich aber auch aus den beiden Komponenten Aa) und Bb) zusammensetzen lassen.

Trägt man daher im Punkte R $YR = CK = md^2$ so an, daß es von Y nach R im Sinne wie von C nach D

zeigt, und errichtet man in Y auf YR die Senkrechte, entsprechend der Richtung der noch unbekannten Tangentialbeschleunigung $m\,\delta$, so schneidet sie sich mit der in W errichteten Normalen im gesuchten Punkte X und XY ist nach Größe, Lage und Richtungssinn die Tangentialbeschleunigung $m\,\delta$.

Wie man erkennt, ist der Punkt U zwar zur Überlegung unerläßlich, aber zur Konstruktion selbst nicht nötig. Seine Bestimmung kann daher ohne Schaden fortgelassen werden.

Besonderer Fall:
$a = \text{const}$; $\alpha = 0$.

Die Konstruktion läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn die Antriebskurbel AB mit konstanter Winkelgeschwindigkeit a rotiert. Wählt man dann den Geschwindigkeitsmaßstab $1 : a$ der natürlichen Größe, so fallen, wie der Vergleich der Fig. 40 und 41 zeigt, die Punkte E, P, M, O und G, Q, N, R sämtlich im Punkte A zusammen, und da V nach H fällt, so kann man nach der auf S. 149 beschriebenen Ersatzkonstruktion den Punkt W einfacher finden, indem man, anstatt die Punkte S und T zu ermitteln und mit VT um V den Kreis bis W zu schlagen, einfacher mit BH um B den Kreisbogen bis zum Schnitt Z mit dem über BC geschlagenen Halbkreise schlägt und das Lot ZW auf BC fällt.

Fig. 41.

Da in diesem Spezialfall auch R mit A zusammenfällt, so ist es bequem, die Ermittlung von $CK = m\,d^2$ gleich an den Punkt A zu verlegen, indem man AH über H bis zum Punkte x verlängert, so daß $Ax = DC$ ist, dann den Halbkreis über Ax und einen mit AH um A geschlagenen Kreisbogen in y zum Schnitt bringt und das Lot yY von y auf Ax fällt. Dieses schneidet sich mit der in W errichteten Senkrechten im Punkte X. Ein Vergleich mit der auf S. 84 gegebenen Konstruktion Fig. 39 zeigt, daß beide identisch sind, obwohl sie auf zwei völlig verschiedenen Wegen abgeleitet worden sind.

Bemerkung:

Ergibt sich die Strecke $l \cdot b > l$, so läßt sich die oben angewandte Hilfskonstruktion (s. S. 147 b) nicht durchführen, es muß vielmehr die Größe $l\,b^2$ in der auf S. 147 b angegebenen Weise ermittelt werden. Die übrige Konstruktion ist aber ganz analog wie sonst vorzunehmen.

VIII. Vom Gelenkviereck abgeleitete Getriebe.

§ 43. Antrieb eines Schwinghebels durch ein Exzenter mit langer Exzenterstange.

Bei den meisten Ventilsteuerungen haben wir den Fall, daß die Bewegung eines Schwinghebels vermittels einer Exzenterstange von einem Exzenter aus erfolgt, dessen Welle (die Steuerwelle), wenn man vom Ungleichförmigkeitsgrade der Maschine absieht, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Im allgemeinen ist die Länge der Exzenterstange gegenüber der Exzentrizität so groß (etwa das 20—30 fache), daß man sie mit guter Genauigkeit bei der graphischen Untersuchung als

unendlich annehmen kann. Dann vereinfacht sich die auf S. 83 unter Fig. 39 angegebene Konstruktion noch etwas.

Ist nämlich in Fig. 39 *AB* die Exzenterkurbel. *BC* die Exzenterstange und *CD* der Schwinghebel und lassen wir *BC* unter Beibehaltung der mittleren Exzenterstangenrichtung sowie der Größe und Richtung der Glieder *AB* und *CD* immer größer und größer und schließlich unendlich lang werden, so rücken die Punkte *C* und *D* natürlich immer weiter weg, aber die Punkte *A*, *B*, *F*, *S*, *T*, *N* behalten hre Lage bei und der Punkt *L* fällt im Grenzfall mit *B* zusammen. Die in *L* errichtete Senkrechte geht in die in *B* auf der Exzenterstangenrichtung *BC* errichtete Senkrechte über.

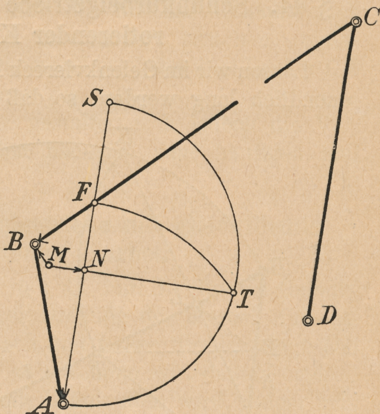


Fig. 42.

Wir erhalten dann die folgende in Fig. 42 wiedergegebene Konstruktion der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwinghebelpunktes *C*:

Man verlege den Schwinghebel *CD* nach Größe und Richtung an den Mittelpunkt *A* der Steuerwelle, so daß *D* mit *A* zusammenfällt und *S* den freien Endpunkt bezeichnet, bringe *AS* in *F* zum Schnitt mit der durch das Exzentermittel *B* gezogenen mittleren Exzenterstangenrichtung und schlage mit *AF* um *A* den Kreis bis zum

Schnitt T mit dem über AS gezeichneten Halbkreis. Errichtet man dann in B die Normale auf der mittleren Exzenterstangenrichtung und fällt von T das Lot TN auf AS, so ist ihr Schnittpunkt M. FA stellt dann die Geschwindigkeit, MA die Beschleunigung des Punktes C dar, MN ist die Tangential-, NA die Normalbeschleunigung.

§ 44. Schubkurbelgetriebe mit ungleichförmig rotierender Kurbel.

Lassen wir im Gelenkviereck Fig. 40 die Schwinge CD unendlich lang werden, so daß sich Punkt C auf einer

Fig. 43.

Geraden $g\,g$ anstatt auf einem Kreis um D bewegt, so erhalten wir das in Fig. 43 wiedergegebene allgemeine Schubkurbelgetriebe ABC und wir nennen AB die Kurbel, BC die Pleuelstange und das in C zur Führung nötige Gleitstück den Kreuzkopf.

Wird $CD = \infty$, so erkennen wir, daß in Fig. 40 Punkt K nach C und so auch Y nach R fällt, daß also in der Konstruktion der Beschleunigung p_c des Kreuzkopfes C eine kleine Vereinfachung eintritt, weil man nicht erst $CK = m\,d^2$ ermitteln muß, sondern gleich durch R die Parallele RX zur Gleitbahnrichtung $g\,g$ bis zum Schnitt X mit der in W errichteten Normalen ziehen kann.

Im übrigen bleibt aber die für das Gelenkviereck entwickelte Konstruktion unverändert bestehen, wobei natürlich an Stelle der früheren Parallelen zum Lenker CD die Normale zur Gleitbahn $g\,g$ tritt.

Wesentlich einfacher gestalten sich jedoch die Verhältnisse, wenn wir den nächsten sehr häufigen Fall voraussetzen:

§ 45. Schubkurbelgetriebe mit gleichförmig rotierender Kurbel.

Gehen wir von der in § 41 Fig. 39 für das Gelenkviereck bei gleichförmiger Drehung der Kurbel AB entwickelten Konstruktion aus und lassen die Schwinge CD unendlich groß werden, so erkennen wir, daß N nach A fällt und somit der Punkt M gefunden wird, indem man durch A die Parallele zur Gleitbahn $g\,g$ zieht und sie mit der in L auf BC errichteten Senkrechten in M zum Schnitt bringt. (Fig. 43.)

§ 46. Mohrsche Konstruktion der Beschleunigung des Kreuzkopfs.[1])

Aus der Konstruktion des Punktes L (Fig. 43) folgt, daß

$$BL \cdot BC = (BK)^2 = (BF)^2\,, \qquad BL = \frac{(BF)^2}{BC}\,.$$

[1]) O. Mohr, Konstr. der Beschl. am Kurbelgetriebe, Civ. 1880.

Wir können daher an Stelle der in Fig. 43 zur Ermittlung von L angewandten Konstruktion auch die Hilfskonstruktion S. 149 (Fig. 75) benutzen, indem wir Punkt A als den Punkt betrachten, von dem aus die drei Strahlen nach den Punkten B, F und C gezogen sind. Wir haben dann durch F parallel AC bis zum Schnitt E mit AB und durch E parallel AF bis zum Schnitt L mit BC zu ziehen, auf BC in L die Senkrechte zu errichten und sie mit der durch A parallel zur Gleitbahn gg gelegten Geraden in M zum Schnitt zu bringen.

§ 47. Andere Ableitung der Mohrschen Konstruktion.

Eine etwas andere Überlegung führt ebenfalls zur Mohrschen Konstruktion.

Die bekannte Geschwindigkeit $BA = ka$ des Kurbelzapfens B (Fig. 43) läßt sich zerlegen in die beiden Komponenten:

1. $FA = v_c =$ Geschwindigkeit, die B als Punkt des Kreuzkopfs hat,
2. $BF = l \cdot c =$ Relativgeschwindigkeit des Kurbelzapfens B gegenüber dem Kreuzkopf.

Die bekannte Beschleunigung $BA = ka^2$ des Kurbelzapfens läßt sich in ähnlicher Weise zerlegen in:

1. die Beschleunigung $MA = p_c$, die B als Punkt des Kreuzkopfs hat,
2. die Relativbeschleunigung BM, die B gegenüber dem Kreuzkopf besitzt, bestehend aus den beiden rechtwinkligen Komponenten:
   a) $BL = lc^2 =$ Normalbeschleunigung,
   b) $LM = l \cdot \gamma =$ Tangentialbeschleunigung.

Man kann nun

$$BL = lc^2 = \frac{(lc)^2}{l} = \frac{(BF)^2}{BC}$$

in der vorher (§ 46) angegebenen Weise durch Ziehen von $FE \parallel AC$ und $EL \parallel AF$ finden, in L die Senkrechte auf BC

errichten und durch A die Parallele zu gg ziehen, die sich in M schneiden. Dann ergibt der Beschleunigungszug $BLMA$ der obigen drei Komponentenbeschleunigungen 1), 2a), 2b) die Resultierende BA und die Strecke MA stellt wieder die gesuchte Kreuzkopfbeschleunigung p_c dar.

§ 48. Rotierende Kurbelschleife. Allgemeines.

Halten wir im Schubkurbelgetriebe ABC (Fig. 43) die Kurbel AB fest und lassen sich dafür das Gestell AC

Fig. 44.

bewegen, so gelangen wir zur rotierenden Kurbelschleife ABC (Fig. 44).

Wir nennen jetzt AB das Gestell, BC die Kurbel, AC die Schleifkurbel und das in C befindliche und gegenüber AC die Führung besorgende Stück das Gleitstück.

Wir wollen die Antriebskurbel $BC = k$ und den augenblicklichen Abstand $AC = l$ nennen. Die Winkelgeschwindigkeit bzw. -beschleunigung der Kurbel BC

um B soll wie bisher immer b bzw. β, die der Schleifkurbel AC um A entsprechend a bzw. α heißen. Die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung des Gleitstücks gegenüber der Schleifkurbel sei mit v_c bzw. p_c bezeichnet.

Dann können wir folgende Aufgaben stellen:

I. Es sind die Bewegungsverhältnisse der Kurbel BC bekannt, es sollen die entsprechenden Größen für die Schleifkurbel ermittelt werden. (Lösung in § 49.)

II. Es sind die Bewegungsverhältnisse der Schleifkurbel AC gegeben und die der Kurbel BC aufzusuchen. (Lösung in § 50.)

§ 49. Rotierende Kurbelschleife. Ermittlung der Bewegung der Schleifkurbel.

Sind die Winkelgeschwindigkeit b und die Winkelbeschleunigung β bekannt, mit der sich die Kurbel k um B dreht, so kennt man auch in Fig. 44

a) die Geschwindigkeit $CD = kb$,

b) die Normalbeschleunigung $CE = kb^2$, die mit der vorigen in der Beziehung steht

$$CE = k \cdot b^2 = \frac{(k \cdot b)^2}{k} = \frac{(CD)^2}{BC} = \frac{(CF)^2}{BC},$$

c) die Tangentialbeschleunigung $EG = k\beta$,

mit denen sich C um B bewegt.

Geschwindigkeiten:

Die Geschwindigkeit CD kann man zerlegen in:

1. die Geschwindigkeit v_c des Gleitstücks C gegenüber der Schleifkurbel; sie fällt in die Richtung gg und steht — nach der üblichen Drehung aller Geschwindigkeiten um 90° — senkrecht zu gg;

2. die Geschwindigkeit la, mit der sich der augenblicklich mit C zusammenfallende Punkt der Schleifkurbel um A dreht. Sie fällt nach der Drehung in den Polstrahl AC der Schleifkurbel. Zieht man daher von D das Lot auf die Gleitbahn gg bis zum Schnitt H mit AC, so ist im Geschwindigkeitsdreieck CDH

$$HD = v_c\,,$$
$$CH = l \cdot a\,.$$

Da uns l und nun auch $l \cdot a$ bekannt sind, so kennen wir auch die gesuchte Winkelgeschwindigkeit a.

Beschleunigungen:

Die aus CE und EG resultierende bekannte Beschleunigung CG des Punktes C kann man zerlegen in:

1. die Beschleunigung p_c des Gleitstücks C gegenüber der Schleifkurbel AC; sie fällt in die Richtung gg;
2. die Beschleunigung des mit C zusammenfallenden Punktes der Schleifkurbel gegen das Gestell, bestehend aus den beiden rechtwinkligen Komponenten:
   a) la^2 = Normalbeschleunigung in die Richtung CA fallend,
   b) $l \cdot \alpha$ = Tangentialkomponente, senkrecht zur vorigen;
3. die Coriolis-Beschleunigung von der Größe $2\,v_c \cdot a$, senkrecht zur wirklichen Richtung von v_c in dem Sinne zeigend, in dem v_c bei einer im Drehsinn von a vorgenommenen Drehung um 90° zeigen müßte. Diese Beschleunigung steht also senkrecht zu gg und zeigt im Sinne von H nach D.

Da die Beschleunigungskomponenten p_c und $l\alpha$ vorläufig nur der Richtung nach bekannt sind, so werden sie in dem nunmehr aufzuzeichnenden Beschleunigungsplan bis zuletzt aufgespart. Zunächst wird die Beschleunigung $CK = la^2$ aus $AC = l$ und $CH = la$ in

der gewohnten Weise (s. Hilfskonstruktion S. 147) ermittelt, indem man über AC den Halbkreis und um C mit HC den Kreisbogen schlägt und vom gemeinsamen Schnittpunkt J das Lot JK auf AC fällt; denn es ist

$$CK = \frac{(CJ)^2}{CA} = \frac{(CH)^2}{CA} = \frac{(l\,a)^2}{l} = l\,a^2 .$$

Dann kann die Coriolis-Beschleunigung $2\,v_c \cdot a$ gefunden werden, indem man $HD = v_c$ im Verhältnis $a:1$ verkleinert und das Resultat verdoppelt. Zieht man zu diesem Zwecke $KL \parallel HD$ bis zum Schnitt L mit CD, so findet man

$$KL = HD \cdot \frac{CK}{CH} = v_c \cdot \frac{l\,a^2}{l\,a} = v_c \cdot a\,;$$

verlängert man KL über L um sich selbst bis M, so ist $KM = 2\,v_c\,a$ und der Linienzug CKM stellt die Beschleunigungen 2a) und 3) nach Größe, Richtung und Richtungssinn dar.

Zieht man noch durch G die Parallele zu $g\,g$ und durch M die Senkrechte zu AC, die sich in N schneiden mögen, so stellt NG die Gleitbeschleunigung p_c, MN die Tangentialbeschleunigung $l\,\alpha$ dar und zwar beide nach Größe, Richtung und Richtungssinn.

Da nun $l\,\alpha$ sowie l bekannt sind, so sind auch die gesuchte Winkelbeschleunigung α und damit die Bewegungsverhältnisse der Schleifkurbel gefunden.

§ 50. Rotierende Kurbelschleife. Ermittlung der Bewegung der Kurbel.

Sind die Winkelgeschwindigkeit a und Winkelbeschleunigung α bekannt, so führt die gleiche Überlegung wie in § 49 zur Ermittlung von b und β. Nur

sind diesmal als unbekannte Beschleunigungen im Beschleunigungsplan

die Gleitbeschleunigung p_c und

die Tangentialbeschleunigung $k \cdot \beta$

anzusehen.

Geschwindigkeiten:

Durch den Endpunkt H (Fig. 44) der bekannten Geschwindigkeit $CH = la$ legt man die Senkrechte $HD \perp gg$ bis zum Schnitt D mit der Kurbel BC. Das dadurch gebildete Geschwindigkeitsdreieck CHD enthält dann als Seite CD die Geschwindigkeit $k \cdot b$ des Punktes C, aus der in Gemeinschaft mit $BC = k$ die gesuchte Winkelgeschwindigkeit b hervorgeht.

Beschleunigungen:

Mit der Winkelgeschwindigkeit a und der Winkelbeschleunigung α sind auch die Normalbeschleunigung $CK = la^2$ und die Tangentialbeschleunigung $l\alpha$ bekannt. Wie in § 49 erhält man die Coriolis-Beschleunigung $KM = 2 v_c a$, indem man durch K $KL \parallel HD$ bis zum Schnitt L mit CD zieht und KL bis M über L hinaus verdoppelt. $MN = l\alpha$ wird nun senkrecht zu AC gezogen unter Beachtung des richtigen Richtungssinnes. Die durch N parallel zu gg gelegte Gerade fällt dann in die Richtung der Gleitbeschleunigung p_c und muß zum Punkte G führen, der einerseits der Endpunkt des Beschleunigungszuges $CKMNG$, andererseits der Endpunkt der Gesamtbeschleunigung des Punktes C ist. Von letzterer ist die Normalkomponente $CE = kb^2$ aus $CD = kb$ und $BC = k$ in gewohnter Weise zu finden, indem man über BC den Halbkreis, sowie um C mit CD den Kreisbogen bis zum gemeinsamen Schnitt F zieht und von F auf BC das Lot FE fällt. Dieses gibt zu-

gleich die Richtung der Tangentialbeschleunigung $k\beta$ an, welche durch G gehen muß. Somit wird G als Schnitt von EF und NG gefunden.

§ 51. Sonderfälle der rotierenden Kurbelschleife.

1. Die Gerade gg geht durch den Drehpunkt A der Schleifkurbel. Dann haben wir das übliche **Schleifkurbelgetriebe.**

Wendet man die eben für die rotierende Kurbel-

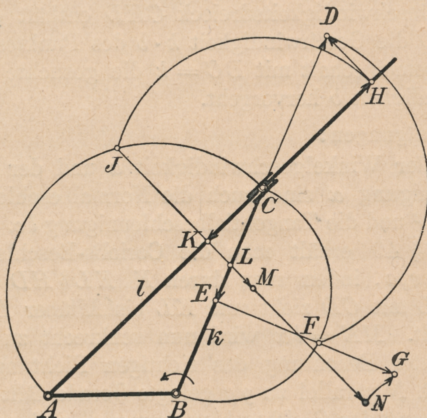


Fig. 45.

schleife abgeleitete Konstruktion der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen an, so ergibt sich eine Vereinfachung insofern, als die Coriolis-Beschleunigung und die Tangentialbeschleunigung des Schleifkurbelpunktes C in ein und dieselbe Richtung fallen, so daß die Punkte $KLMN$ auf einer einzigen zu AC senkrechten Geraden liegen.

Wir konstruieren also (Fig. 45) zunächst das Geschwindigkeitsdreieck CDH, indem wir $DH \perp AC$ ziehen. Dann wird der Endpunkt K der Normalbeschleunigung $CK = l a^2$ wie bisher ermittelt, indem man vom Schnittpunkt J des über AC geschlagenen Halbkreises und des um C mit $CH = l a$ geschlagenen Kreisbogens das Lot JK auf AC fällt. Verlängert man dieses

Fig. 46.

über K bis zum Schnitt N mit der durch G zur Gleitrichtung AC gezogenen Parallelen GN und macht $LM = KL$, so ist

$KM = 2\,KL = 2\,v_c \cdot a$ die Coriolis-Beschleunigung,

$MN = l\alpha$ die gesuchte Tangentialbeschleunigung des Schleifkurbelpunktes C,

$NG = p_c$ die Gleitbeschleunigung des Gleitstücks.

Gleichförmige Drehung der Kurbel k.

$b = \text{const}; \; \beta = 0$.

Dann vereinfacht sich die Konstruktion noch mehr, da bei Wahl des Geschwindigkeitsmaßstabes $1 : b$ die

Punkte E, F, G mit B zusammenfallen und daher anstatt durch G durch B die Parallele BN bis zum Schnitt N mit KL zu ziehen ist.

2. Der Lenker CB wird unendlich lang. Dann erhalten wir die in Fig. 46 skizzierte

Rotierende Kurbelschleife mit gerader Führung des Punktes C.

Es ist dieselbe Betrachtung wie bei der rotierenden Kurbelschleife mit Kreisführung von C (Fig. 44) anzustellen. Nur wird die Normalbeschleunigung $CE = k \cdot b^2$ der Fig. 44 gleich Null, so daß sich die Konstruktion des Beschleunigungsplanes in der aus Fig. 46 ersichtlichen Weise vereinfacht, weil EG durch C geht.

§ 52. Oszillierender Zylinder.

Hält man im Getriebe (Fig. 45) die Kurbel BC fest und läßt AB um B rotieren, während die Stange AC ständig durch den Punkt C geht, so erhält man das in Fig. 47 skizzierte Getriebe, wie es bei einem „oszillierenden Zylinder" vorliegt.

Es seien b und c bzw. β und γ die Winkelgeschwindigkeiten bzw. Winkelbeschleunigungen der Kurbel AB um B und des Zylinders um C; ferner sei $AB = m$, die veränderliche Länge $AC = l$.

Als bekannt seien vorausgesetzt b und β, also auch die Geschwindigkeit $AD = m\,b$, Normalbeschleunigung $AE = m\,b^2$ und Tangentialbeschleunigung $EG = m\,\beta$ des Kurbelzapfens A.

Geschwindigkeiten:

Die bekannte Geschwindigkeit $AD = m\,b$ des Kurbelzapfens A setzt sich zusammen aus:

$HD = v_a =$ Geschwindigkeit des Kolbenstangenpunktes A relativ zum Zylinder ($HD \perp AC$),

$AH = lc =$ Schwingungsgeschwindigkeit des Punktes A der Zylinderebene gegenüber dem Gestell.

Beschleunigungen:

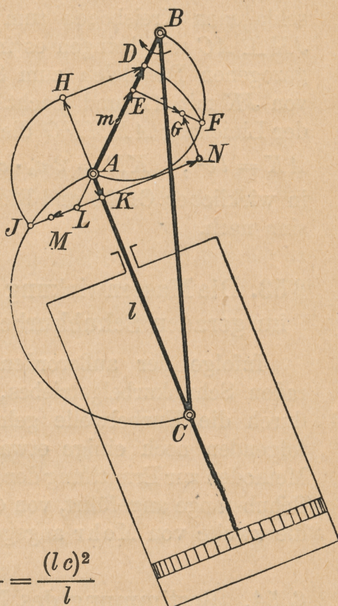


Fig. 47.

Die Gesamtbeschleunigung AG des Kurbelzapfens ist nach Größe und Richtung der Voraussetzung nach bekannt, ließe sich aber auch durch Zusammensetzung folgender Beschleunigungen erhalten:

1. der Beschleunigung $NG = p_a$ des Kolbenstangenpunktes A gegenüber dem Zylinder, in die Richtung CA fallend,
2. der Beschleunigung des Zylinderpunktes A, bestehend aus den beiden zueinander rechtwinkligen Komponenten:

a) $AK = \frac{(AJ)^2}{AC} = \frac{(AH)^2}{AC} = \frac{(lc)^2}{l}$ $= lc^2 =$ Normalbeschleunigung, in Richtung AC fallend,

b) $MN = l\gamma =$ Tangentialbeschleunigung, senkrecht AC fallend,

3. der Coriolis-Beschleunigung

$$KM = 2\,KL = 2\,HD \cdot \frac{AK}{AH} = 2\,v_c \frac{lc^2}{lc} = 2\,v_c \cdot c\,.$$

Zur Konstruktion der Geschwindigkeiten bzw. Beschleunigungen fällen wir daher $DH \perp AC$ und erhalten das Geschwindigkeitsdreieck AHD. Dann bringen wir den Halbkreis über AC mit dem um A mit AH geschlagenen Kreisbogen zum Schnitt J, ziehen das Lot $JK \perp AC$ und bringen es in N mit der durch G zu AC gezogenen Parallelen zum Schnitt. Ist L der Schnitt von JK mit AB und macht man $LM = LK$, so enthält der Linienzug $AKMNG$ die einzelnen Beschleunigungen

$$AK = lc^2, \quad KM = 2 v_a \cdot c, \quad MN = l\gamma, \quad NG = p_a$$

in wirklicher Größe und Richtung, auch dem Richtungssinn nach.

§ 53. Die Massenwirkung der schweren Schubstange im geraden Schubkurbelgetriebe. Allgemeines.

Infolge der außerordentlichen Bedeutung des geraden Schubkurbelgetriebes, bei dem die Gleitrichtung durch die Kurbelwelle geht, für die Praxis seien im folgenden noch einige etwas weitergehende graphische Methoden zur Ermittlung der Massenwirkung der schweren Schubstange angeführt, von denen die erste von Mollier, die zweite von Mohr angegeben worden ist.

§ 54. Bestimmung des Rückdrucks der bewegten Schubstange auf den Kolben nach Mollier.[1])

Bei der Bewegung des Schubkurbelgetriebes äußert sich die fortwährende Änderung der in der Schubstange enthaltenen kinetischen Energie E in einem variablen

---

[1]) R. Mollier, Der Beschleunigungsdruck der Schubstange. Z. 1903.

Rückdruck P auf den Kolben. Die Änderung dE der kinetischen Energie während der Zeit dt muß hierbei gleich der in dieser Zeit von der Kraft P auf ihrem Wege dx geleisteten Arbeit $P\,dx$ sein, wobei $dx = w\,dt$ den in der Zeit dt vom Kreuzkopf C mit der Geschwindigkeit w durchlaufenen Weg darstellt. Es ist also

$$dE = P \cdot w \cdot dt\,,$$

$$P = \frac{1}{w} \cdot \frac{dE}{dt}\,. \tag{18}$$

Die Bewegung der Schubstange (Fig. 48) kann aufgefaßt werden entweder

1. als eine Schiebung längs der Gleitbahn $g\,g$ des Kreuzkopfes C mit der Kreuzkopfgeschwindigkeit w, verbunden mit einer gleichzeitigen Relativdrehung um C

Fig. 48.

gegenüber der Kreuzkopfebene mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{u}{l}$, wenn u die Relativgeschwindigkeit des Punktes B gegenüber der Kreuzkopfebene bedeutet; oder

2. als eine Schiebung mit der Geschwindigkeit s des Schwerpunktes S und eine gleichzeitige Drehung um

den Schwerpunkt mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit $\frac{u}{l}$ wie vorher.

Bezeichnet M die Masse, J_s das Trägheitsmoment der Stange um ihren Schwerpunkt, so ergibt sich die gesamte kinetische Energie der Stange

$$E = \frac{M}{2} s^2 + \frac{J_s}{2} \left(\frac{u}{l}\right)^2. \tag{19}$$

Zieht man $AF \perp gg$ bis zum Schnitt F mit BC, so ergeben nach Früherem im Geschwindigkeitsdreieck BFA die Komponenten:

$$BF = u\,,$$

$$FA = w$$

als Resultierende die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens B

$$BA = v\,.$$

Die Geschwindigkeit s des Schwerpunktes setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeit w des Kreuzkopfs und der Relativgeschwindigkeit $h \cdot \frac{u}{l}$ gegenüber der Kreuzkopfebene, wobei $h = SC$. Man findet diese, wenn man $BF = u$ im Verhältnis $\frac{h}{l}$ verkleinert, d. h. durch S $ST \parallel AC$ bis zum Schnitt T mit der Kurbel und $TU \parallel AF$ bis zum Schnitt U mit BC zieht. Dann ist

$$UF = h \cdot \frac{u}{l}\,,$$

und da

$$UF \mathbin{\hat{+}} FA = UA$$

ist, aber auch

$$h \cdot \frac{u}{l} + w = s$$

sein muß, so ergibt sich, daß

$$UA = s$$

ist. Bezeichnet man die Winkel der Kurbel bzw. der Schubstange gegen die Gleitbahn gg mit α bzw. β, so wird

$$\sphericalangle AFB = 90 - \beta\,,$$

$$\sphericalangle ABF = \alpha + \beta$$

und wir können aus den beiden Dreiecken AUF und ABF die Beziehungen ableiten

$$s^2 = w^2 + \left(h\frac{u}{l}\right)^2 - 2\,w \cdot \frac{h\,u}{l}\sin\beta\,,$$

$$v^2 = w^2 + u^2 - 2\,w \cdot u \cdot \sin\beta\,.$$

Die Elimination von β hieraus führt zu der Gleichung

$$(20) \qquad s^2 = w^2 + \left(h \cdot \frac{u}{l}\right)^2 - \frac{h}{l}(w^2 + u^2 - v^2)\,.$$

Führt man an Stelle von J_s das Trägheitsmoment J um den Kreuzkopfzapfen C und dafür wieder den Trägheitsradius $k = \sqrt{\frac{J}{M}}$ ein, so kann man schreiben

$$(21) \qquad J_s = J - Mh^2 = M(k^2 - h^2)\,.$$

Setzt man (20) und (21) in (19) ein, so erhält man als Gesamtenergie der Schubstange

$$(22) \qquad E = \frac{M}{2}\left[w^2\frac{l-h}{l} - u^2 \cdot \left(\frac{h}{l} - \frac{k^2}{l^2}\right) + \frac{h}{l}v^2\right].$$

Die Differentiation von E nach der Zeit t ergibt hiernach

$$\frac{dE}{dt} = M\left[w\frac{dw}{dt}\frac{l-h}{l} - u\frac{du}{dt}\left(\frac{h}{l} - \frac{k^2}{l^2}\right) + v\frac{dv}{dt}\cdot\frac{h}{l}\right],$$

so daß die Gleichung (18) übergeht in die andere

$$(23)\quad P = M\left[\frac{dw}{dt}\frac{l-h}{l} - \frac{u}{w}\frac{du}{dt}\left(\frac{h}{l} - \frac{k^2}{l^2}\right) + \frac{v}{w}\frac{dv}{dt}\frac{h}{l}\right].$$

Da hierin noch keinerlei beschränkende Voraussetzung für die Winkelgeschwindigkeit ω der Kurbel gemacht wurde, so gilt diese Gleichung auch für variable Kurbelzapfengeschwindigkeit v.

Spezialfall; ω = konst.

In den meisten Fällen wird man die vereinfachende Annahme machen können, daß die Kurbel mit konstanter Geschwindigkeit rotiert. Dann wird

$$v = \text{konst.}, \qquad \frac{dv}{dt} = 0,$$

und Gleichung (23) geht in die einfachere über

$$(24)\quad P = M\left[\frac{dw}{dt}\frac{l-h}{l} - \frac{u}{w}\frac{du}{dt}\left(\frac{h}{l} - \frac{k^2}{l^2}\right)\right].$$

Wählen wir als Maßstab der Beschleunigungen wie üblich $1 : \omega^2$ und wenden wir die Mohrsche Konstruktion an, nämlich $AF \perp gg$, $FE \parallel AC$, $EL \parallel AF$, $LM \perp BC$ und $AM \parallel gg$, so stellt

$AM = a = \dfrac{1}{\omega^2}\cdot p_c = \dfrac{1}{\omega^2}\cdot\dfrac{dw}{dt}$ die Beschleunigung des Kreuzkopfs,

$LM = \dfrac{1}{\omega^2}\cdot\dfrac{du}{dt}$ die Tangentialbeschleunigung $\dfrac{du}{dt}$ des Punktes B relativ zum Kreuzkopf dar.

Nun ergibt sich aus $\triangle ABF$ die Beziehung

$$\frac{u}{w} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Zieht man daher $MN \parallel AB$, $NO \perp gg$ bis zum Schnitt O mit AM, so ist

$$MN = \frac{LM}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$MO = b = MN\cos\alpha = LM\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{u}{w}\right)\frac{du}{dt},$$

und wir können daher für (24) schreiben

$$(25)\qquad P = M\cdot\omega^2\left[a\cdot\frac{l-h}{l} - b\left(\frac{h}{l} - \frac{k^2}{l^2}\right)\right],$$

wobei a und b die oben angegebenen Strecken AM und MO bedeuten, die in m zu messen sind, wenn das Kurbelgetriebe im natürlichen Maßstabe aufgezeichnet worden ist.

Größe von a und b in den Totlagen $\alpha = 0$, $\alpha = 180°$.

a) In beiden Totlagen wird $BF = u = AB = r$, also auch $BL = \frac{u^2}{l} = \frac{r^2}{l} = r\lambda$ und daher

$$(26)\quad a_{0^0} = [AB]_{0^0} + [BL]_{0^0} = r + r\lambda = r(1+\lambda),$$

$$(27)\quad a_{180^0} = -[AB]_{180^0} + [BL]_{180^0} = -r + r\lambda = -r[1-\lambda],$$

wobei $\lambda = \frac{r}{l}$ das Schubstangenverhältnis bedeutet.

b) Rechnerisch ergibt sich aus Fig. 48:

1. allgemein:

$$b = MN\cos\alpha = AB\frac{MC}{AC}\cos\alpha = r\frac{AC-a}{AC}\cos\alpha,$$

$$(28)\quad b = r\cdot\left[1 - \frac{a}{r\cos\alpha + l\cos\beta}\right]\cos\alpha;$$

2. für die Totlagen:

(29) $\alpha = 0°: \quad \beta = 0°; \quad b_0 = r[1 - \lambda]$,

(30) $\alpha = 180°; \quad \beta = 0°; \quad b_{180°} = -r[1 + \lambda]$.

§ 55. Bestimmung der Resultierenden der auf eine schwere Schubstange wirkenden Trägheitskräfte nach Mohr.[1])

Ist ω die konstante Winkelgeschwindigkeit der Kurbel CB (Fig. 49), S der Schwerpunkt der Schubstange AB, ferner $m \cdot \overline{BS} \cdot \overline{SD}$ die Größe des Trägheitsmoments der Schubstangenmasse m in bezug auf den

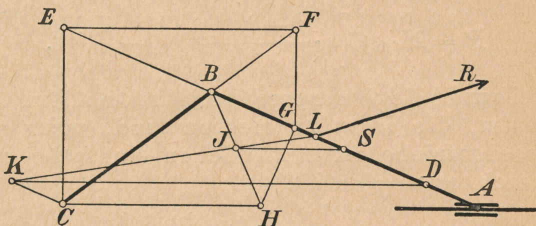


Fig. 49.

Schwerpunkt S, woraus die Bedeutung und Lage des Punktes D hervorgeht, und zieht man $CE \perp AC$, $EF \parallel AC$, $FG \perp AC$, $GH \perp AB$, und außerdem SJ und DK parallel zu AC, CK parallel zu AB, bezeichnet ferner den Schnittpunkt von KJ und AB mit L, so geht die im Zeitpunkt der Betrachtung den äußeren auf die Stange einwirkenden Kräften das Gleichgewicht haltende Trägheitskraft R durch den Punkt L, ist parallel zu CJ, hat den Sinn $\overline{CJ}$ und die Größe

(31) $$R = m \cdot \omega^2 \overline{CJ} \text{ in kg,}$$

1) O. Mohr, Z. 1899.

wenn im natürlichen Maßstab gezeichnet und $\overline{CJ}$ in m gemessen wird.

Der Beweis der Richtigkeit dieser Konstruktion ist von Mohr zuerst im Civiling., Bd. XLI, Heft 8 gegeben worden.

IX. Steuerungen mittels Schubkurvengetriebe.

§ 56. Nockensteuerungen. Allgemeines.

Eine auf einer Achse A (Fig. 50 und 51) festgekeilte unrunde Scheibe, die mit der Achse rotiert, bietet ein sehr einfaches Mittel, aus der Drehbewegung der „Steuerwelle" A eine bestimmte hin und her gehende Bewegung der Rolle C abzuleiten. Man kann dabei den Rollenmittelpunkt C zwingen, entweder

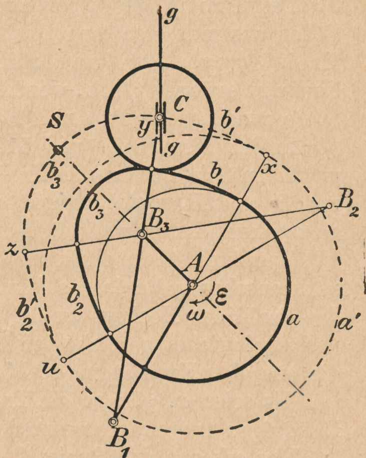


Fig. 50.

I. sich auf einer Geraden gg (Fig. 50) zu bewegen, indem man die Rolle an einem auf der Geraden auf und nieder gehenden Gleitstück befestigt, oder

II. einen Kreis um einen Punkt D (Fig. 51) zu beschreiben, indem man die Rolle mittels des Lenkers $CD = l$ an dem Punkte D befestigt.

Man wird in allen Fällen die Bewegungsverhältnisse (d. h. die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung ε) des Nockens bzw. der Steuerwelle A kennen. Es besteht die Aufgabe, Weg s, Geschwindigkeit $v = l\omega'$ und Tangentialbeschleunigung $p_t = l\varepsilon'$ des Rollenmittelpunktes C zu untersuchen, wenn das Profil des Nockens bekannt ist. Hierin sind ω', ε' die Winkelgeschwindigkeit bzw. Winkelbeschleunigung von l um D.

§ 57. Analyse des Getriebes einer Nockensteuerung.

Das Profil des Nockens besteht in den meisten Fällen aus mehreren tangential ineinander übergehenden Kreisbögen. Der tangentiale Übergang ist unbedingt erforderlich, wenn man harte und gefährliche Stöße zwischen Nocken und Rolle vermeiden will.

In den Figuren 50 und 51 setzt sich das Profil der unrunden Scheibe aus den Kreisbögen a um A, b_1 und b_2 um B_1 und B_2 und b_3 um B_3 zusammen. Es ist leicht einzusehen, daß man die Rolle, ohne die Bewegung ihres Mittelpunktes C dabei zu ändern, in den Punkt C zusammenschrumpfen lassen kann, wenn man gleichzeitig das Profil des Nockens zu der im Abstande des Rollenradius gestrichelt gezeichneten Äquidistanten erweitert, die aus den Kreisbögen a', b_1', b_3', b_2' zusammengesetzt ist. Es seien x, y, z, u die Trennpunkte, in denen diese Kreisbögen tangential aneinander stoßen.

Man erkennt, daß Punkt C, während sich der Nocken im Uhrzeigersinne dreht, zunächst eine Zeitlang (zwischen u und x) mit dem Kreis a' in Berührung und somit selbst in Ruhe war. Von x bis y erhebt er sich dem Kreisbogen b_1' entsprechend bis in die gezeichnete Lage und darauf weiter bis zum Scheitel S des Kreises b_3' längs

des letzteren in seine höchste Lage, sinkt darauf längs b_3 bis z und längs b_2' bis u in die Ruhelage zurück, die er wieder bis x beibehält, um von neuem sich zu erheben.

Im Intervalle $x - y$ bleibt offenbar die Entfernung CB_1 zwischen C und dem sich mit dem Nocken drehenden Punkte B_1 dauernd dieselbe, so daß man die gleiche Bewegung von C auch erhielte, wenn man durch eine Kuppelstange CB_1 das Rollenmittel C mit dem Nockenpunkte B_1 verbinden und dafür die unrunde Scheibe

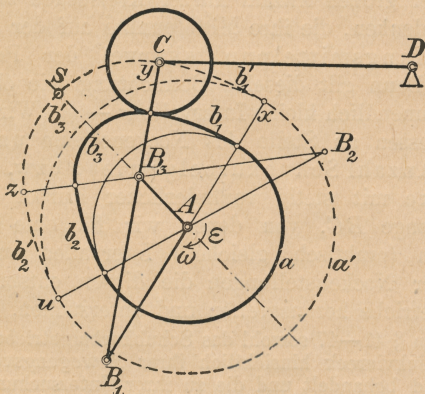


Fig. 51.

ganz fortlassen würde, d. h. wir können den Nocken im Intervall $x - y$ im Falle I durch das Schubkurbelgetriebe AB_1C (Fig. 50), im Falle II durch das Gelenkviereck AB_1CD (Fig. 51) ersetzen.

Im Intervall $y - z$ bleibt die Entfernung CB_3 dauernd die gleiche; an Stelle des Nockens kann somit das Schubkurbelgetriebe AB_3C (Fig. 50) bzw. das Gelenkviereck AB_3CD (Fig. 51) treten.

Im Intervall $z - u$ endlich ändert sich der Abstand zwischen C und B_2 nicht, sondern behält ständig den Wert $B_2 z$; also kann man hier den Nocken durch das Schubkurbelgetriebe AB_2C (Fig. 50) bzw. das Gelenkviereck AB_2CD (Fig. 51) ersetzen, wobei in beiden Fällen die Schubstange B_2C die Länge B_2z hat.

Besteht das Profil des Nockens nicht aus Kreisen, sondern aus anderen Kurven mit veränderlicher Krümmung, so kann man sich dasselbe gleichwohl als aus einer großen Anzahl kurzer Kreisbögen zusammengesetzt denken, die ihre Mittelpunkte auf der Evolute (Krümmungsmittelpunktskurve) der Profilkurve haben. Dann gilt dieselbe Betrachtung wie oben, aber nur für unendlich kleine Intervalle $x - y$. Wir erhalten infolgedessen an Stelle des Nockens eine unendlich große Anzahl Schubkurbelgetriebe bzw. Gelenkvierecke mit stetig veränderlicher Kurbel AB und Schubstange BC, von denen wir für eine Reihe in gewissen (praktisch gleichen) Intervallen aufeinander folgender Nockenstellungen die diesen entsprechenden Ersatzgetriebe herausgreifen und untersuchen.

Da in § 41—47 sowohl das Schubkurbelgetriebe wie auch das Gelenkviereck hinsichtlich ihrer Bewegungsverhältnisse eingehend behandelt und die zu ihrer Untersuchung nötigen graphischen Verfahren angegeben und begründet sind, so erübrigt es sich, hier nochmals darauf einzugehen.

Besteht das Profil einer unrunden Scheibe zum Teil aus geradlinigen Stücken, so kann man den Nocken nicht mehr durch ein Schubkurbelgetriebe oder Gelenkviereck ersetzen. Wie man aus Fig. 52 und 53 vielmehr erkennt, erhält man in diesem Falle das Getriebe einer rotierenden Kurbelschleife, die mit der bekannten Winkelgeschwindigkeit ω bzw. Winkelbeschleunigung ε der Steuerwelle A rotiert, während das Gleitstück C

gezwungen wird, sich entweder auf der Geraden *ss* oder auf dem Kreise um *B* zu bewegen. Wir erhalten also

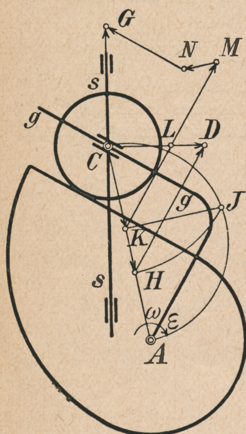


Fig. 52.

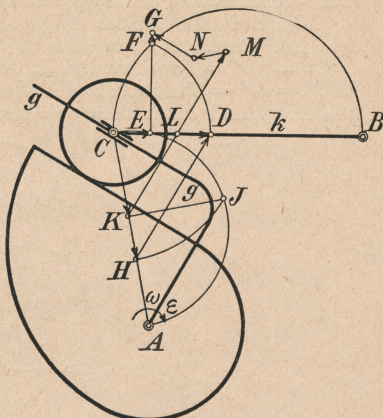


Fig. 53.

die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung von *C*, indem wir in der in § 48—51 angegebenen Weise verfahren.

§ 58. Beispiel.

Es sei nur auf Fig. 54 aufmerksam gemacht, in der für den dort gezeichneten Nocken einer Hochofengebläsemaschine, dessen Maße weiter unten angegeben werden, die Geschwindigkeits- und Beschleunigungskonstruktion für die Lage *y* des Punktes *C* eingezeichnet sind; und zwar sind die ausgezogenen Linien die Konstruktionslinien für das Kurbelgetriebe AB_1CD, die punktierten diejenigen für das Kurbelgetriebe AB_3CD. Da dieselben Buchstaben gewählt sind wie früher beim Gelenkviereck, so wird es leicht sein, durch Vergleich mit Fig. 39 die Konstruktion zu verfolgen und die einzelnen Linien zu deuten. Es sei noch bemerkt,

daß die nur für das Getriebe AB_1CD in Frage kommenden Buchstaben mit dem Index 1, die nur für AB_3CD gebrauchten mit dem Index 3 versehen sind, während die für beide Getriebe gemeinsamen keinen Index tragen.

Die hauptsächlichsten Vektoren im Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsplan sind

$FA = l\omega'$ = Geschwindigkeit des Punktes C,

$MN = l\varepsilon'$ = Tangentialbeschleunigung des Punktes C;

Aus ihnen sind damit auch das gesuchte ω' und ε' bekannt.

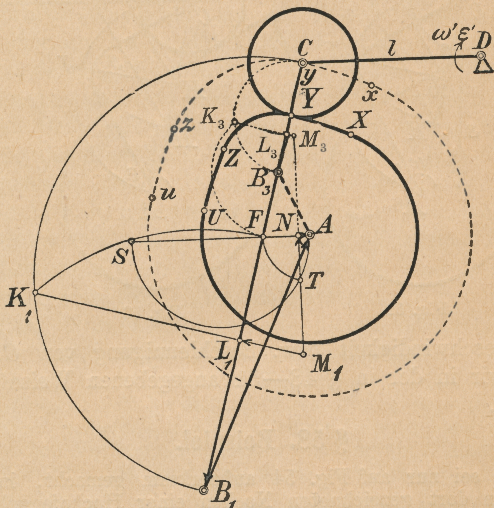


Fig. 54.

In Fig. 55 sind Weg s, Geschwindigkeit $v = l\omega'$ und Tangentialbeschleunigung $p_t = l\varepsilon'$ über dem der Zeit proportionalen Kurbelwinkel als Abszisse aufgetragen. Man erkennt, daß in den Punkten x, y, z, u in bezug auf den Verlauf der Beschleunigungen Unstetigkeiten auftreten, indem nämlich in x die Beschleunigung plötzlich vom Werte 0 auf einen verhältnismäßig großen positiven Wort, in y von

einem positiven auf einen negativen, in z umgekehrt von einem negativen auf einen positiven Wert springt, bis sie schließlich in u von einem positiven auf den Wert 0 plötzlich zurücksinkt. In der Geschwindigkeitskurve macht sich naturgemäß diese Unstetigkeit in einem plötzlichen Wechsel der Tangentenrichtung, in der Wegkurve in einem

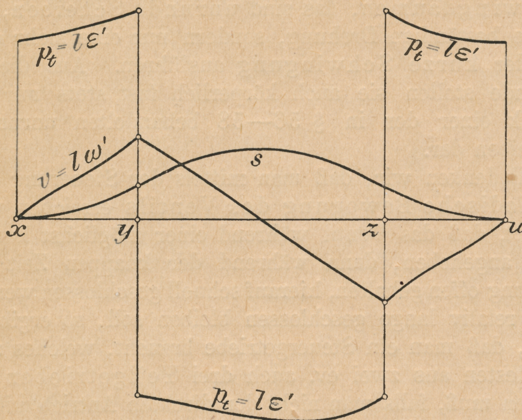


Fig. 55.

freilich dem Auge nicht so auffallenden plötzlichen Wechsel der Krümmung bemerkbar.

Für die Berechnung der Ventilfedern kommt in der Hauptsache nur die größte negative Beschleunigung (zwischen y und z) in Frage.

Die wirklichen Maße des Nockens (Fig. 54) waren die folgenden:

Radius der unrunden Scheibe	$AX =$	150 mm
„ „ Rolle	$CY =$	75 „
Krümmungsradius	$B_1Y =$	535 „
	$AB_3 =$	98 „
	$CD = l =$	250 „
	$\sphericalangle XAU =$	99 „

§ 59. Schwingdaumensteuerungen. Analyse des Getriebes.

Bei einer großen Anzahl moderner Ventilsteuerungen für Dampf und Gasmaschinen verwendet man sogenannte Schwingdaumen, das sind unrunde Scheiben, die keine beständige Drehung, sondern nur eine mehr oder minder kurze Schwingung ausführen. Aus diesem Grunde stellen sie auch körperlich fast stets nur ein Stück einer der in § 56—58 behandelten unrunden Scheiben dar.

Bedenken wir, daß man mittels der Steuerung eine periodische Bewegung des Ventils erreichen will, derart, daß das Ventil während einer möglichst kurzen Zeit angehoben, dann während der knappen Zeit der Füllung offen gehalten, hierauf schnell geschlossen werden und relativ lange geschlossen bleiben soll, so ergibt es sich, daß man ein Steuergetriebe braucht, welches zum mindesten aus zwei ev. auch drei Teilgetrieben bestehen muß, falls man nicht den direkten Antrieb mittels unrunder Scheiben von der Steuerwelle wählen will wie im vorigen Kapitel.

Von den Teilgetrieben hat

Getriebe I aus der kontinuierlichen Drehung der Steuerwelle eine beständige Schwingbewegung des Schwinghebels zu erzeugen;

Getriebe II muß aus dieser beständigen Schwingbewegung eine periodisch durch längere Ruhepausen unterbrochene Schwingbewegung entweder des Ventils direkt oder erst eines Zwischenhebels ableiten. Im letzteren Falle macht es sich nötig, daß auch noch

Getriebe III diese zweite Schwingbewegung auf das Ventil selbst überträgt.

§ 60. Bewegungsverhältnisse.

Was die Bewegungsverhältnisse anlangt, so ist stets die in den meisten Fällen konstante Winkelgeschwindigkeit ω der Steuerwelle A (Fig. 56—61) bekannt. Man hat daraus die Bewegung, d. h. Weg s, Geschwindigkeit v und Beschleunigung p eines Punktes der Ventilspindel $s\,s$ zu finden. Dies geschieht, indem man der Reihe nach in den Getrieben I, II, III die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen graphisch ermittelt.

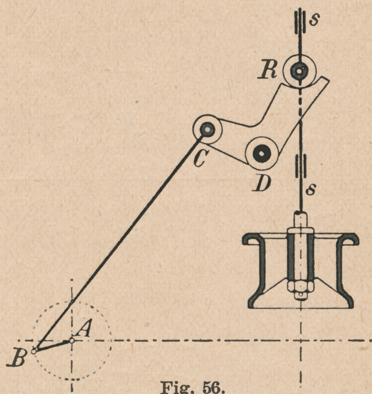


Fig. 56.

Getriebe I. In allen Fällen wird die Bewegung von der Steuerwelle A durch ein Exzenter, d. i. kinematisch eine kleine Kurbel $AB = r$, mittels einer langen Schubstange $BC = l$ auf den Punkt C übertragen, der, wie aus den Figuren 56, 57, 58, 60, 61 ersichtlich ist, durch einen Hebel CD zu einer Drehung um einen festen Punkt D gezwungen wird. Wir haben somit als erstes Getriebe ein Gelenkviereck $ABCD$, dessen Antriebskurbel mit der bekannten, aus der Tourenzahl n ermittelten Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\pi n}{30}$ rotiert. Wir können daher die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes C finden, wenn wir die in § 41, 42 angegebene

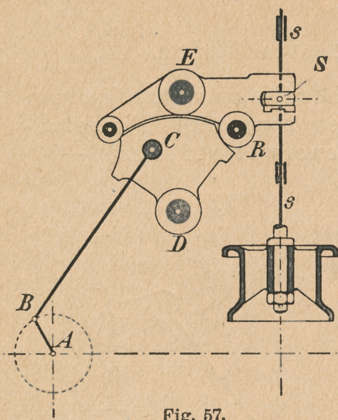


Fig. 57.

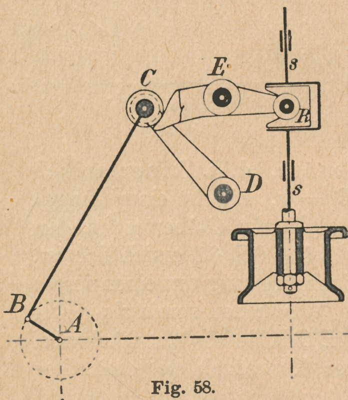


Fig. 58.

Konstruktion anwenden. Da $r : l$ sehr klein ist und meist unter 1 : 20 liegt, so genügt es praktisch, die Näherungskonstruktion § 43, Fig. 42 zu benutzen, die für den Fall $r : l = 1 : \infty$ absolut genau wäre.

In Fig. 59 beschreibt C eine Äquidistante zu der schwarzen Schubkurve (siehe auch Fig. 62), die aus Kreisbögen und geraden Stücken zusammengesetzt ist. D. h. C bewegt sich auf Kreisbahnen um die Krümmungszentren A_1 bzw. A_2 der Schubkurve (Fig. 62) oder geradlinig längs $b' c'$, so daß wir entweder ebenfalls ein Gelenkviereck $ABCA_1$ bzw. $ABCA_2$ oder ein Schubkurbelgetriebe ABC haben.

Getriebe II. Mit der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes C ist auch die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung des Schwinghebels CD um D bekannt. Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden:

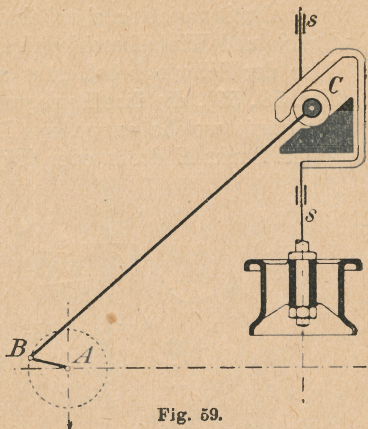


Fig. 59.

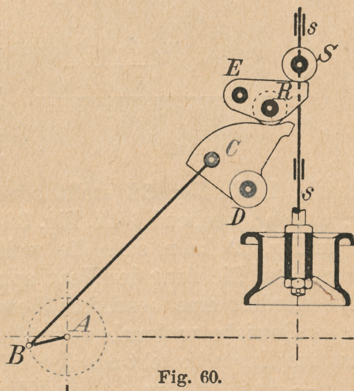


Fig. 60.

1. Entweder trägt der Schwinghebel *CD* die Schubkurve, wie in Fig. 56, 57, 60, 61. Dann haben wir als zweites Getriebe eine unrunde Scheibe, die mit bekannter, aber veränderlicher Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung sich dreht und eine Rolle *R* entweder (Fig. 56) auf gerader Bahn *ss* oder (Fig. 57, 60, 61) auf einem Kreisbogen um *E* bewegt, so so daß wir wieder wie bei den unrunden Scheiben (§ 57) ein Schubkurbelgetriebe (§ 44, Fig. 43) oder Gelenkviereck (§ 41, Fig. 38), bei geradlinigem Profil der Schubkurve eine rotierende Kurbelschleife mit geradlinig bewegtem Punkt *C* (§ 51, Fig. 46) oder mit kreisförmig bewegtem Punkt *C* (§ 50, Fig. 44) haben,

diesmal mit variabler, aber bekannter Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der Antriebskurbel.

2. Oder der Schwinghebel trägt am Ende eine Rolle C (Fig. 58, 59), die ihre Bewegung auf eine Schubkurve überträgt, welche entweder (Fig. 58) sich um einen festen Punkt E dreht oder (Fig. 59) sich längs einer Geraden ss hin und her bewegen kann. Wir haben also in Fig. 58 wieder dasselbe Getriebe wie bei einer unrunden Scheibe, nur geht der Antrieb nicht von der unrunden Scheibe, sondern von der Rolle C aus, so daß in Fig. 54 im Gelenkviereck $ABCD$ der Lenker CD zur Antriebskurbel, die Kurbel AB zum Gegenlenker wird. Das Getriebe II in Fig. 58 stellt somit ein Gelenkviereck dar, das entsprechend § 41, Fig. 39 zu untersuchen wäre.

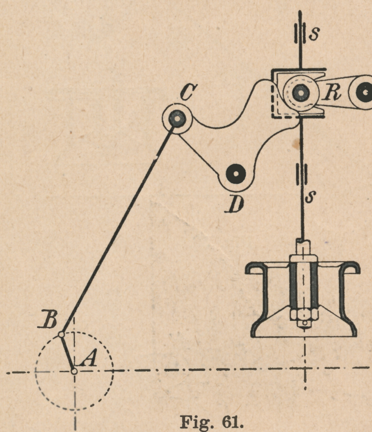


Fig. 61.

In Fig. 59 kann sich die weiße Schubkurve nur in der geraden Richtung der Ventilspindel bewegen. Dieser Fall erfordert eine besondere Betrachtung. In Fig. 62 ist das Getriebe nochmals vergrößert aufgezeichnet. Die schwarze Kurve besteht aus den beiden Kreisbögen $a - b$ und $c - d$ um A_1 bzw. A_2 und der Geraden $b - c$, tangential an beiden Kreisbögen. Die weiße Schubkurve setzt sich aus den Kreisbögen $\alpha - \beta$ und $\gamma - \delta$ um C_1 und C_2 und ihrer gemeinsamen Tangente $\beta - \gamma$ zusammen.

Der Mittelpunkt C der Rolle bewegt sich relativ zu beiden Profilen auf deren Äquidistanten im Abstand des Rollenradius, nämlich auf $a'b'c'd'$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$.

Die Rolle ist in der Lage gezeichnet, in der sie das schwarze Profil in b berührt. Das weiße Profil kann

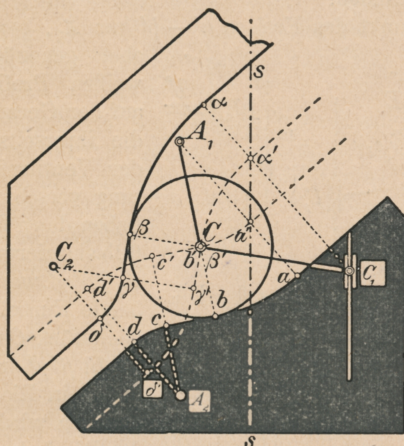


Fig. 62.

nun entweder noch auf dem Kreise α — β oder schon auf der Geraden β — γ berührt werden. In der Zeichnung ist die Zwischenlage β angenommen, die beide Fälle in sich vereinigt. Es ergeben sich damit vier verschiedene Möglichkeiten, die zu ebensoviel verschiedenen Getrieben führen:

a) C wird als Punkt des Kreises $a'b'$ um A_1 angesehen Gegenüber dem weißen Profil bewegt sich C auf dem Kreise $\alpha'\beta'$ um C_1, wobei sich C_1 selber in der Richtung $s\,s$ der Ventilspindel bewegt. Dann können wir

das Getriebe als ein Schubkurbelgetriebe $A_1 C C_1$ (Fig. 62 a) auffassen, dessen Kurbelzapfen C sich mit bekannter, aus Getriebe I ermittelter Geschwindigkeit und Beschleunigung bewegt. Nach § 44, Fig. 43 läßt sich dann auch die Geschwindigkeit und Beschleunigung von C_1 finden.

b) C ist Punkt des Kreises $a' - b'$ um A_1, bewegt sich aber gegenüber dem weißen Profil schon auf der Geraden $\beta'\gamma'$, die ihrerseits sich in der Ventilspindelrichtung verschiebt. Wir haben dann das in Fig. 62b skizzierte Getriebe $A_1 C \beta' \gamma'$, wo die antreibende Kurbel $A_1 C$ das Gleitstück C so an das Profil $\beta'\gamma'$ drückt, daß dieses in Richtung $s\,s$ gehoben wird.

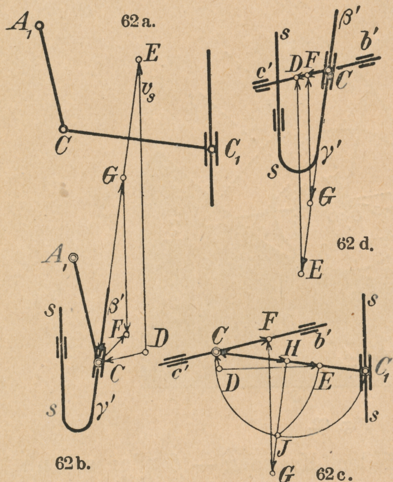


Fig. 62 a—62 d.

Die bekannte Geschwindigkeit von C um A_1 (die Geschwindigkeiten seien hier einmal ausnahmsweise nicht gedreht) $v_B = D\,C \perp A_1 C$ läßt sich zerlegen in die gesuchte Ventilgeschwindigkeit $v_s = DE$ in Richtung $s\,s$ und die Relativgeschwindigkeit $v_r = EC$ des Punktes C auf der Geraden $\beta'\gamma'$.

Desgleichen kann man die bekannte Beschleunigung $p_c = CF$ des Punktes C, die aus dem Getriebe I nach Größe und Richtung ermittelt worden ist, in die

gesuchte Ventilbeschleunigung $p_s = GF$ in Richtung s und die Relativbeschleunigung $p_r = CG$ des Gleitstücks C gegenüber $\beta'\gamma'$ in Richtung $\beta'\gamma'$ zerlegen.

c) C befindet sich schon auf der Geraden $b'c'$, bewegt sich aber relativ zum weißen Profil noch auf dem Kreise $\alpha'\beta'$, dessen Mittelpunkt C_1 selbst sich in der Richtung $s\,s$ verschiebt. In diesem Falle können wir an Stelle der Schubkurven das in Fig. 62c angegebene Getriebe $b'c'CC_1$ setzen.

Zeichnen wir wie üblich die Geschwindigkeiten in ihrer um 90° gedrehten Lage, so setzt sich im Geschwindigkeitsdreieck CDE die bekannte Geschwindigkeit $v_c = DC \perp b'c'$ aus der Ventilgeschwindigkeit $DE = v_s \perp s\,s$ und der Relativgeschwindigkeit $v_r = EC$ des Punktes C um C_1 zusammen.

In gleicher Weise kann man die bekannte Beschleunigung $p_c = CF$ im Beschleunigungsplan $CHGF$ in die gesuchte Ventilbeschleunigung $p_s = GF$ in Richtung $s\,s$ und die Relativbeschleunigung $p_r = CG$ von C um C_1 zerlegen, wobei deren Normalkomponente $p_n = CH$ als der Ausdruck $\frac{(CE)^2}{CC_1}$ in bekannter Weise konstruiert werden kann, indem über CC_1 der Halbkreis und um C der Kreisbogen mit dem Radius CE in J zum Schnitt gebracht werden und das Lot $JH \perp CC_1$ gefällt wird. Dieses schneidet dann auf der durch F zu $s\,s$ gezogenen Parallelen die gesuchte Ventilbeschleunigung $p_s = GF$ ab.

d) C bewegt sich auf der Geraden $b'c'$, während er gegenüber dem weißen Profil die Gerade $\beta'\gamma'$ beschreibt, die sich mit der Ventilspindel in der Richtung $s\,s$ geradlinig verschiebt. Wir haben dann das Getriebe

Fig. 62d. Die bekannte Geschwindigkeit $v_c = CD$ (nicht gedreht) zerfällt in die gesuchte Ventilgeschwindigkeit $v_s = ED$ in Richtung $s\,s$ und die Relativgeschwindigkeit $v_r = CE$ des Punktes C gegen $\beta'\gamma'$.

Genau so kann man die bekannte Beschleunigung $p_c = CF$ in die gesuchte Ventilbeschleunigung $p_s = GF$ in Richtung $s\,s$ und die Relativbeschleunigung $p_r = CG$ von C gegen $\beta'\gamma'$ zerlegen.

Ganz dieselben Betrachtungen hat man für diejenigen Lagen anzustellen, in denen die Rolle die Profile auf den Strecken $b\,c$ und $\gamma\,\delta$ oder $c\,d$ und $\beta\,\gamma$ oder $c\,d$ und $\gamma\,\delta$ gleichzeitig berührt. Man kommt dann auf dieselben Getriebe wie unter a), b), c) erörtert und in Fig. 62 a), b), c) skizziert. Natürlich erhält man andere Abmessungen der Getriebe als vorher.

Getriebe III. In Fig. 57, 58, 60, 61 haben wir mit der Geschwindigkeit v_R und Beschleunigung p_R des Punktes R noch nicht die der Ventilspindel selbst gefunden.

In Fig. 58 und 61 haben wir v_R in die gesuchte Ventilgeschwindigkeit v_s in Richtung $s\,s$ und die Relativgeschwindigkeit von R gegen die Ventilspindel, nämlich $v_r \perp s\,s$ zu zerlegen. Nur in der Mittellage $ER \perp s\,s$ wäre $v_R = v_s$. Doch sind die Ventilhübe gegenüber ER meist so klein, daß die Abweichung der Richtung ER von der zur Spindel $s\,s$ senkrechten Lage vernachlässigt und die Geschwindigkeit v_R an Stelle der Ventilgeschwindigkeit v_s gesetzt werden kann.

Desgleichen wäre eine Zerlegung der Beschleunigung von p_R in Richtung $s\,s$ und senkrecht dazu auszuführen. Auch hier bleibt man in der Regel innerhalb guter Genauigkeit, wenn man die Tangentialbeschleunigung von p_R an Stelle der Ventilbeschleunigung p_s setzt.

In Fig. 57 hat man zunächt aus v_R und p_R die Geschwindigkeit v_S und Beschleunigung p_S des Punktes S vom Rollenhebel ER zu ermitteln, indem man v_R bzw. p_R im Verhältnis $ES : ER$ vergrößert. Dann kann man analog dem eben für Fig. 58 und 61 Gesagten v_S für die Ventilgeschwindigkeit v_s und die Tangentialkomponente von p_S für die Ventilbeschleunigung p_s setzen.

In Fig. 60 haben wir ein anderes Getriebe. Man erkennt, daß der Hebel ER als eine unrunde Scheibe mit geradem Profil angesehen werden kann, welche die Rolle S in Richtung der Ventilspindel ss geradlinig bewegt. Daher stellt das Getriebe ERS wie bei den unrunden Scheiben eine rotierende Kurbelschleife dar, bei welcher das Gleitstück sich auf einer Geraden verschiebt, während sich die Kurbelschleife mit einer aus v_R und p_R bekannten Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung um E dreht. Wir haben damit das in § 51, Fig. 46 behandelte Getriebe und können in der dort besprochenen Weise die Geschwindigkeit und Beschleunigung von S finden.

§ 61. Beispiel.

Als Beispiel ist in Fig. 63 und 64 die Untersuchung einer Pröllsteuerung älterer Art (Fig. 58) angegeben. Fig. 63 zeigt oben den Schwinghebel, dessen Profil aus den beiden Kreisbögen ab um A_1 und cd um A_2, sowie aus der Geraden bc tangential an diese Kreise zusammengesetzt ist. Die entsprechenden Punkte der Äquidistante durch C zu $a\,b\,c\,d$ sind $a'b'c'd'$. Die zu diesen Punkten gehörigen Lagen $a''b''c''d''$ des Rollenmittels C liegen auf Kreisen durch $a'b'c'd'$ um E und außerdem auf dem Kreise durch C um D.

Der Exzenterkreis e (= Kurbelkreis der Kurbel AB in Fig. 58) ist an den Punkt D verlegt. Die Kurbelstellungen α' und α'' bei „Anheben" und „Aufsetzen" des Ventils liegen symmetrisch zur mittleren Exzenterstangenrichtung mm, die aus den Maschinenabmessungen bekannt

ist. Der Winkel $\alpha' D \alpha''$ ist die Summe der Kurbelwinkel, die zu den im Beispiel als 4,4 % und 35,9 % (für Kurbelseite) angenommenen Kolbenwegen gehören. Die zu $b'' c'' d''$ gehörigen Stellungen $\beta' \gamma' \delta' \gamma'' \beta''$ findet man, wenn man den

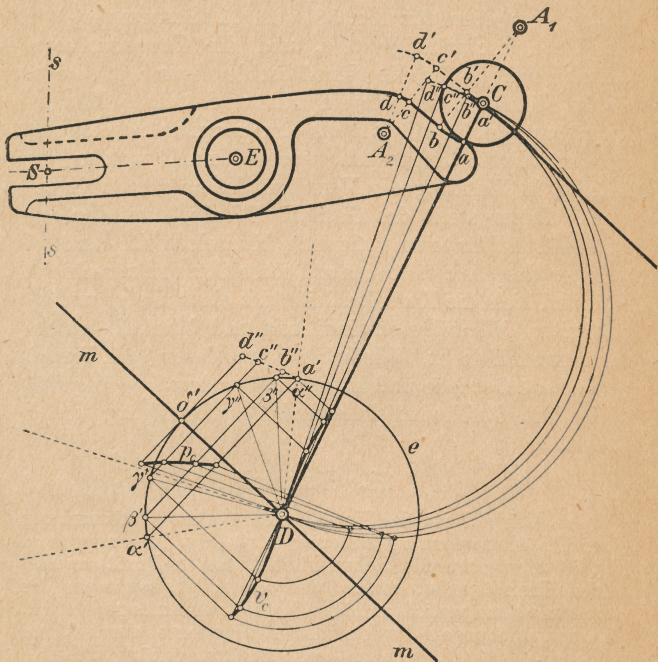


Fig. 63.

Kreisbogen $a' b'' c'' d''$ parallel zu sich selbst nach dem Punkte α'' verlegt und von $b'' c'' d''$ aus lotrecht zu $m\,m$ den Exzenterkreis e anschneidet.

Die in Fig. 63 von D aus nach den Kurven v_c bzw. p_c gezogenen Strahlen geben die Geschwindigkeiten bzw.

Beschleunigungen des Rollenmittels C an, die unter Voraussetzung konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$ für die Steuerwelle und unter Vernachlässigung der endlichen Exzenterstangenlänge in der in § 43, Fig. 42 angegebenen Weise gefunden wurden. Hiervon sind v_c und die Tangentialkomponente p_t von p_c in Fig. 64 über der Zeit aufge-

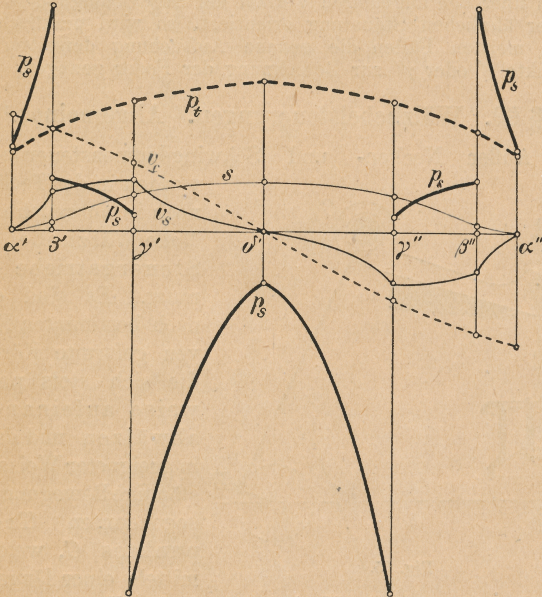


Fig. 64.

getragen, die den Wegen des Kurbelzapfens auf dem Exzenterkreis proportional ist.

In der weiter oben erörterten Weise (§ 50) ist aus v_c und p_c mittels der für das Getriebe DCE zu benutzenden Konstruktionen der Weg s, die Geschwindigkeit v_s und die Tangentialbeschleunigung p_s des Punktes S vom Hebel ES ermittelt und im Diagramm Fig. 64 aufgezeichnet worden.

Ähnlich dem bei den unrunden Scheiben erhaltenen Resultat erkennt man, daß die Punkte *a b c d* **Unstetigkeitspunkte** des Getriebes sind, in welchen sich die **Beschleunigungen** p_s **sprungweise** ändern.

Zur Berechnung der Ventilfeder ist die Beschleunigung p_s für die Zeitpunkte γ' bzw. γ'' zugrunde zu legen. Ist man über den ungefähren Verlauf der Beschleunigung p_s bei einer ähnlichen Steuerung orientiert, so wird praktisch in den meisten Fällen die genaue Aufsuchung derselben im Punkte γ' oder γ'' zur Berechnung der Feder genügen.

§ 62. Wälzhebelsteuerungen. Allgemeines.[1])

Außer Nocken- und Schwingdaumensteuerungen werden in der Technik noch in ausgedehntem Maße **Wälzhebel** als **Steuergetriebe** benutzt. Es sind dies nach bestimmten Kurven geformte Körper, die sich stets **paarweise aufeinander abwälzen** und dabei in geeigneter Weise die ständige Bewegung des sogenannten **Treibpunktes** *C*, welcher mittels einer längeren Exzenterstange an den Kurbelzapfen *B* einer Exzenterkurbel *AB* angeschlossen ist, auf einen Punkt *S* der Ventilspindel, den sogenannten **Hubpunkt**, übertragen.

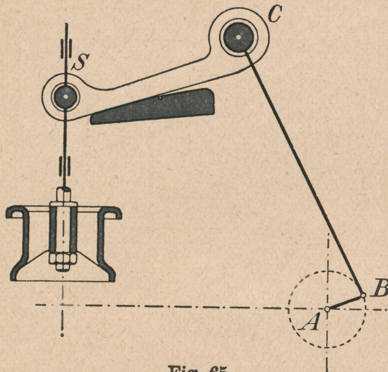


Fig. 65.

In den Figuren 65—68 sind einige typische Fälle solcher Steuerungen schematisch wiedergegeben.

---

[1]) Siehe auch H. Holzer, Wälzhebel, Z. 1908.

Man unterscheidet nun zwei wesentlich verschiedene Anordnungen, nämlich:

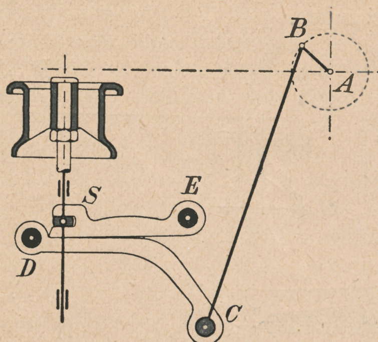


Fig. 66.

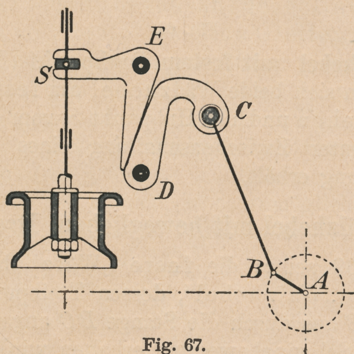


Fig. 67.

I. **Wälzhebel mit beweglichem Drehpunkt** (Fig. 65 und 68), bei denen der Drehpunkt mit dem Hubpunkt S identisch ist und sich auf der Ventilspindelachs

verschiebt. Bei diesen ist die eine Wälzkurve (in den Figuren die schwarze) fest und unbeweglich mit dem Gestell verbunden.

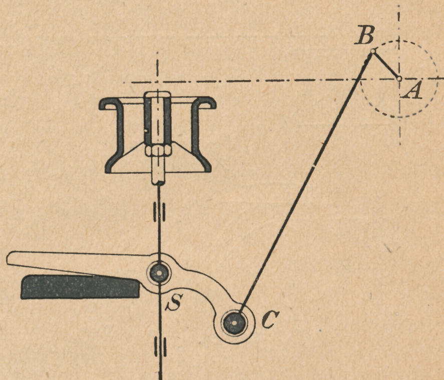


Fig. 68.

II. **Wälzhebel mit festem Drehpunkt** (Fig. 66 und 67), bei denen sich beide Wälzhebel um feste Punkte D und E drehen und der Hubpunkt S vom getriebenen Wälzhebel unter Zwischenschaltung eines Gleitstücks seine Bewegung erhält.

§ 63. Wälzhebel mit beweglichem Drehpunkt.

In Fig. 69 sei π die feste „Wälzbahn“, p der bewegliche „Wälzhebel“, dessen Treibpunkt C vom Exzenter AB aus durch die Stange BC angetrieben und in ständiger Schwingbewegung erhalten wird. Im Hubpunkt S ist p mit der Ventilspindel ss gelenkig verbunden. E sei der momentane Berührungspunkt der Wälzkurven, Ω und O ihre Krümmungszentren für den Punkt E.

Ebenso wie mittels der Schwingdaumensteuerungen wünscht man mittels der Wälzhebelgetriebe aus einer ununterbrochenen Schwingbewegung des Treibpunktes C eine periodisch durch längere Ruhepausen unterbrochene Schwingungsbewegung des Ventils abzuleiten. Diese Aufgabe könnte durch unendlich viele verschiedene Wälzkurvenpaare gelöst werden. Die Auswahl unter dieser Fülle von Möglichkeiten wird durch folgende drei hauptsächlichen Anforderungen beschränkt, die im Interesse ruhigen Ganges und geringer Abnutzung des Triebwerkes eine ideale Wälzhebelsteuerung erfüllen müßte:

1. Die im Hubpunkt S auf die Ventilspindel ausgeübte Kraft soll möglichst keine zu ihr senkrechte Komponente haben, um die Spindelführung nicht zu belasten.
2. Um die Abnutzung der Kurven auf einen Mindestwert zu beschränken, soll zwischen den Hebeln reines Rollen ohne Gleiten stattfinden.
3. Um Stoßwirkungen, sogenanntes „Klatschen", zwischen den Wälzkurven zu vermeiden, muß ein Aufeinandertreffen der Wälzkurven mit endlicher Geschwindigkeitsdifferenz verhindert werden.

Wie wir sehen werden, ist es unmöglich, allen diesen Anforderungen gleichzeitig vollkommen zu genügen. Die für ihre Erfüllung maßgebenden Gesichtspunkte mögen jedooh im folgenden betrachtet werden.

Zu 1: Die auf p wirkenden Kräfte sind die in C in Richtung der Exzenterstange CB wirkenke Zugkraft dieser Stange, die in E senkrecht zu den Wälzkurven stehende Stützkraft, die also in die Richtung EO fällt, und schließlich der im Gelenk S auftretende Zapfendruck in vorläufig noch unbekannter Richtung.

Da diese drei Kräfte ständig im Gleichgewicht sein müssen, so müssen sie sich in einem Punkte schneiden. Die Richtung des Zapfendrucks in S wird also gefunden, indem man S mit dem Schnittpunkt D der Exzenterstange BC und der Stütznormalen EO verbindet. Soll der Zapfendruck in S keine Komponente senkrecht zur

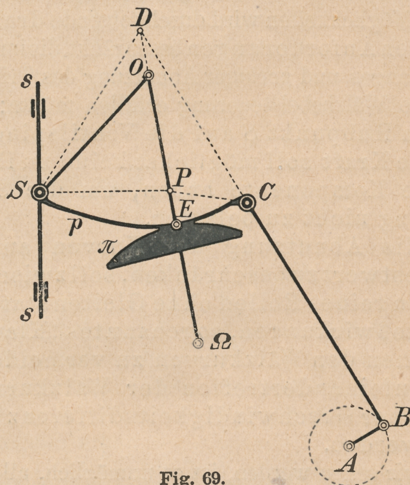


Fig. 69.

Ventilspindel haben, so muß ständig D auf die Spindel ss fallen.

Zu 2: Die Bewegung des Wälzhebels p ist durch die Bahn ss seines Punktes S und durch die Hüllkurve π seiner Kurve p festgelegt. Nach § 8 und § 11 ergibt sich daher der Momentanpol P als Schnitt der in S auf ss errichteten Senkrechten und der Berührungsnormalen in E. Soll augenblicklich zwischen den Kurven p und

π reines Rollen stattfinden, so muß der Momentanpol P in den Berührungspunkt E fallen. Soll diese Bedingung ständig erfüllt sein, so muß p die bewegliche, π die ruhende Polkurve sein, oder auch es muß beständig $ES \perp ss$ stehen.

Zu 3: Die Ebene p dreht sich momentan um P. Daher sind die Geschwindigkeiten vom Treibpunkt C und Hubpunkt S ihren Polstrahlen CP und SP proportional und das Verhältnis $SP : CP$ ist das Übersetzungsverhältnis. Im Augenblick vor dem Hubbeginn hat C eine endliche Geschwindigkeit, S die Geschwindigkeit Null. Damit die Bewegung von S mit unendlich kleiner Geschwindigkeit, einer endlichen Beschleunigung entsprechend, beginnen kann, wie durch Bedingung 3 vorgeschrieben wird, muß beim Hubbeginn dieses Übersetzungsverhältnis $= 0$ sein, d. h. S muß der Pol sein oder die Berührungsnormale EP muß durch S gehen.

Um zu brauchbaren Wälzkurven zu kommen, möge zunächst aus der Anfangslage S_0 und C_0 des Hub- und Treibpunktes die Anfangslage E_0 des Berührungspunktes E und seine Anfangsberührungsnormale $E_0 P_0$ auf Grund obiger Anforderungen ermittelt werden.

Bedingung 1, 2 und 3 sind im Anfangshubpunkt S_0 erfüllt, wenn E_0 mit P_0 zusammenfällt, $P_0 S_0 = 0$ wird, also auch E_0 mit S_0 zusammenfällt und die Berührungsnormale $E_0 O_0$ in die Ventilspindelachse ss zu liegen kommt. Diese Anordnung hat aber den großen praktischen Nachteil, daß im Moment des Niedersetzens des Ventils der Hubpunkt S_0 ein Punkt der festen Wälzbahn und gleichzeitig der nunmehr in Ruhe bleibende Drehpunkt des Wälzhebels ist, so daß sich Wälzhebel und Wälzbahn von nun an ständig in S_0 berühren, also

während der Ruhelage des Ventils nicht wieder auseinandertreten können. Bei der geringsten Ungenauigkeit der Einstellung kann daher das Ventil nicht auf seinen Sitz gelangen und völlig dichten, ein Zustand, der unbedingt vermieden werden muß und nur dadurch vermieden werden kann, wenn man E_0 und S_0 nicht zusammenfallen läßt, d. h. wenn man für den Anfangshubpunkt die Forderung fallen läßt, daß Bedingung 2 und 3 gleichzeitig erfüllt sein sollen.

Damit erhalten wir die beiden praktisch ausführbaren Fälle:

a) Bedingung 1 und 2 sind erfüllt, wenn $E_0 S_0 \perp s s$ und $E_0 O_0$ mit $C_0 B_0$ sich in D_0 auf $s s$ schneiden. Wir haben dann entlastete Ventilspindel, reines Rollen, aber endliche Anfangsübersetzung, also Stoß, der um so geringer und ungefährlicher wird, je weiter E_0 nach $s s$ zu liegt. Dieser Fall wird praktisch häufig ausgeführt.

b) Bedingung 1 und 3 sind erfüllt, wenn E_0 auf $s s$ liegt und $E_0 O_0$ in $s s$ hineinfällt. Wir haben dann entlastete Ventilspindel, stoßfreien Anhub, aber an Stelle des Rollens reines Gleiten, das um so weniger störend wirkt, je näher E_0 bei S_0 liegt. Konstruktiv hat man die Unbequemlichkeit, die Wälzkurven in der Nähe der Ventilspindel gabeln zu müssen, um die Spindel hindurchzulassen. Dieser Fall wird praktisch ebenfalls ausgeführt, wenn auch nicht so häufig wie der vorige.

Nachdem der Anfangsberührpunkt E_0 festgelegt ist, sind die Kurven der Wälzhebel so zu bestimmen, daß sie die drei obengenannten Bedingungen ganz oder annähernd erfüllen, daß aber auch noch außerdem ein brauchbares Ventilerhebungsdiagramm zustande

kommt. Zu diesem Zwecke kann die Methode von Holzer (Z. 1908, S. 2043) empfohlen werden, die aber hier nicht wiedergegeben werden soll.

Es mag dagegen im folgenden die Aufgabe gelöst werden, für zwei gegebene Wälzhebel p und π (Fig. 69) die Bewegungsverhältnisse des Hubpunktes S zu ermitteln, wenn die Steuerwelle A mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Hierfür ist es nötig, die Krümmungsmittelpunkte O und Ω der Wälzkurven zu kennen.

Für eine unendlich kleine Bewegung des Hebels p lassen sich die Kurven p und π durch ihre Krümmungskreise um O und Ω ersetzen. Man kann dann die Bewegung von p als die Zusammensetzung einer momentanen Drehung des Punktes O um den Punkt Ω mit der Geschwindigkeit v_0 mit einer gleichzeitigen Drehung von p um O ansehen. Es läßt sich also an Stelle der beiden Wälzhebel ein Schubkurbelgetriebe $\Omega O S$ setzen, in dem ΩO die Antriebskurbel, OS d. h. p die Schubstange, S der Kreuzkopf ist.

Da C ein Punkt von p, in unserm Getriebe $\Omega O S$ also ein Punkt der Schubstange OS ist, so haben wir den bisher noch nicht gehabten Fall, daß die Bewegung der Antriebskurbel AB auf einen beliebigen Punkt C der Schubstange OS anstatt auf einen Punkt der Kurbel ΩO übertragen wird.

Für die Ermittlung der Geschwindigkeiten (Fig. 70) treten keine weiteren Komplikationen auf, da man den Pol P als momentanen Drehpunkt der Schubstange OS, also PC als den Gegenlenker in einem Gelenkviereck $ABCP$ ansehen und damit die Geschwindigkeit $v_c = CF$ des Punktes C in gewohnter Weise konstruieren kann. Stellt BA die Geschwindigkeit des Punktes B dar, so zieht

man durch A die Parallele zu BC bis zum Schnitt F mit CP. Die Geschwindigkeit $v_s = SH$ von S ist das $SP : CP$-fache der von C, wird also gefunden, indem man $FH \parallel CS$ bis zum Schnitt H mit SP zieht oder, wenn so spitze Schnitte eintreten wie in Fig. 70, lieber $FG \parallel CO$ und $GH \parallel OS$ legt.

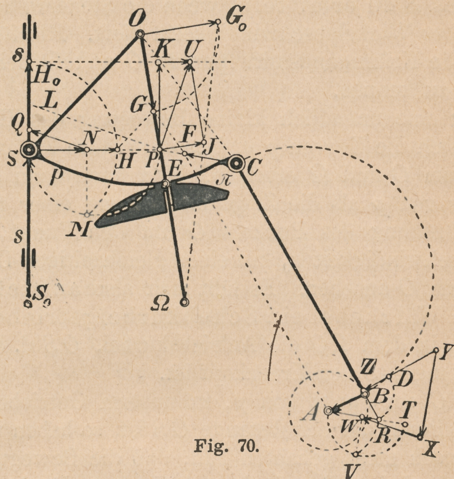


Fig. 70.

Was die **Beschleunigungen** anlangt, so ist zu beachten, daß der Geschwindigkeitspol P selbst eine Beschleunigung p_0 hat (siehe § 14), so daß die Beschleunigung irgendeines andern Punktes der Stange SO, beispielsweise des Punktes C, sich aus p_0 und der Beschleunigung zusammensetzt, die C infolge der Momentandrehung um P hat. Letztere Beschleunigung besteht aus

der **Normalbeschleunigung** $\overline{CP} \cdot \omega^2$, in Richtung des Polstrahls CP, und

der Tangentialbeschleunigung $\overline{CP} \cdot \varepsilon$, senkrecht auf CP stehend,

wenn unter ω bzw. ε die Winkelgeschwindigkeit bzw. Winkelbeschleunigung der Momentandrehung um P verstanden wird.

Um die Richtung der Polbeschleunigung p_0 zu finden, bedenke man, daß die Geschwindigkeiten v_s und v_0 der Punkte S und O, ebenso die Krümmungszentren ihrer Bahnen — das von S liegt unendlich fern, das von O ist Ω — bekannt sind. Nach der in § 16 angegebenen Weise findet man die Polwechselgeschwindigkeit u, indem man die Endpunkte H_0 bzw. G_0 der nicht gedrehten Geschwindigkeiten von S und O ($SH_0 = SH$, $OG_0 = OG$) mit den entsprechenden Krümmungszentren verbindet, d. h. $H_0K \parallel SP$ und $G_0\Omega$ bis zu den Schnittpunkten K und J der durch P zu SH_0 bzw. OG_0 gelegten Parallelen zieht. Die in K auf PK und in J auf PJ errichteten Senkrechten schneiden sich im Punkte U und $PU = u$ ist die gesuchte Polwechselgeschwindigkeit. Die dazu senkrechte Gerade PL ist die Richtung der Polbeschleunigung p_0.

Die Größe der Polbeschleunigung p_0 findet man, wenn man den Beschleunigungsplan für den Punkt S aufzeichnet. Bekannt ist von vornherein die Richtung $s\,s$ der Gesamtbeschleunigung p_s von S, die Richtungen der drei Komponenten $p_0 \parallel PL$, $\overline{PS} \cdot \omega^2 \parallel PS$ und $\overline{PS} \cdot \varepsilon \perp PS$. Außerdem läßt sich $\overline{PS} \cdot \omega^2$ aus $SH = \overline{PS} \cdot \omega$ und $\overline{PS}$ in bekannter Weise auf Grund der Beziehung

$$\overline{PS} \cdot \omega^2 = \frac{[\overline{PS} \cdot \omega]^2}{\overline{PS}}$$

graphisch ermitteln, indem man über PS den Halbkreis

und um S mit SH einen Kreisbogen schlägt, die sich in M schneiden. Das Lot $MN \perp PS$ schneidet dann auf PS die Normalbeschleunigung $SN = \overline{PS} \cdot \omega^2$ ab. Zieht man $NQ \parallel PL$ bis zum Schnitt Q mit ss, so ist $NQ = p_0$ die gesuchte Polbeschleunigung, da sich andernfalls nach Zufügung der letzten Komponente $\overline{PS} \cdot \varepsilon \parallel ss$ keine Resultierende p_s ergeben könnte, die in die Richtung ss fällt.

Die Normalbeschleunigung $CP \cdot \omega^2$ wird analog dem Obigen aus $CF = \overline{CP}\omega$ und CP konstruiert. Es soll jedoch aus Gründen bequemer Konstruktion diese Ermittlung an den Punkt A verlegt werden. Wir verschieben daher FC parallel sich selbst an den Punkt A in die Lage AR. Dann ist R auch der Schnittpunkt von CB mit der durch A zu CP gelegten Parallelen und es ist $AR = \overline{CP}\omega$. Verlängern wir AR über R bis T, so daß $AT = PC$, schlagen über AT den Halbkreis und um A mit AR einen Kreisbogen, die sich in V schneiden, und fällen dann $VW \perp AR$, so ist $WA = \overline{CP} \cdot \omega^2$ der Größe, der Richtung und dem Sinne nach. Verlegen wir $NQ = p_0$ parallel sich selbst nach dem Punkte W so, daß — auch dem Sinne nach — $XW = NQ$, und ziehen durch X die Senkrechte zu AW, die mit der Tangentialbeschleunigung $\overline{CP} \cdot \varepsilon$ des Punktes C parallel geht, so liegt auf dieser der Anfangspunkt Y der Beschleunigung von C und diese hat die Größe, die Richtung und den Sinn YA. Doch ist Y selbst vorläufig noch unbekannt.

Nun kann man aber die Beschleunigung p_c von C auch finden, wenn man die Momentandrehung der Stange BC um ihren Pol (Winkelgeschwindigkeit ω', Winkelbeschleunigung ε') durch die Schiebung ihres Punktes B

und gleichzeitige Drehung um B mit der Winkelgeschwindigkeit ω' und der Winkelbeschleunigung ε' ersetzt. Man kommt dann auf die in § 41 für das Gelenkviereck abgeleitete Konstruktion, die hier in folgender Weise durchzuführen wäre:

Man schlage über BC den Halbkreis und um B mit BR einen Kreisbogen, die sich in D schneiden mögen, und fälle das Lot $DZ \perp BC$; dann ist $ZB = \overline{BC} \cdot \omega'^2$ die Normalbeschleunigung, DZ die Richtung der Tangentialbeschleunigung $\overline{BC} \cdot \varepsilon'$ und BA die Beschleunigung des Punktes B, also muß der Anfangspunkt Y der Gesamtbeschleunigung $p_c = YA$ auf ZD liegen, d. h. wir haben einen zweiten geometrischen Ort für Y. Y ist somit der Schnitt von XY und ZY und es ist $YX = \overline{CP} \cdot \varepsilon$.

Vergrößert man YX im Verhältnis $SP : CP$, trägt die so erhaltene Strecke $S_0S = [SP : CP] \cdot YX$ auf ss so an, das S_0S im gleichen Sinne um P dreht, wie YX, so stellt S_0Q die Beschleunigung des Ventilpunktes S dar; denn es ist dann $S_0S = \overline{SP} \cdot \varepsilon$, $SN = SP \cdot \omega^2$, $NQ = p_0$ nach Größe, Richtung und Sinn.

§ 64. Wälzhebel mit festem Drehpunkt.

In Fig. 71 sei π der treibende, p der getriebene Wälzhebel; beide berühren sich in E und drehen sich um feste Punkte D und F. Im Treibpunkte C wird die Bewegung von der Antriebkurbel AB mittels der Schubstange BC eingeleitet. $ABCD$ stellt dabei ein gewöhnliches Gelenkviereck dar. Im Hubpunkt S wird die Bewegung unter Zwischenschaltung eines Gleitstückes auf die Spindel übertragen.

Diese Anordnung dient dem gleichen Zweck wie die mit beweglichem Drehpunkt. Auch die Anforderungen für betriebssichere Konstruktion bei geringem Verschleiß decken sich im wesentlichen mit denen der Anordnung I

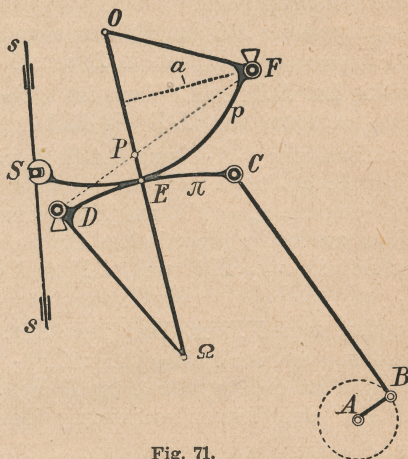


Fig. 71.

und lassen sich hier wie dort durch drei Bedingungen festlegen, nämlich:

1. Die Berührungsnormale EP der Wälzkurven p, π soll vom festen Drehpunkt F einen nicht zu geringen Abstand a haben, damit das zur Öffnung des Ventils erforderliche Drehmoment des getriebenen Hebels p keinen zu großen Normaldruck zwischen den Hebeln bedingt.
2. Die Hebel sollen aufeinander rollen, ohne zu gleiten, um die Abnutzung gering zu halten.